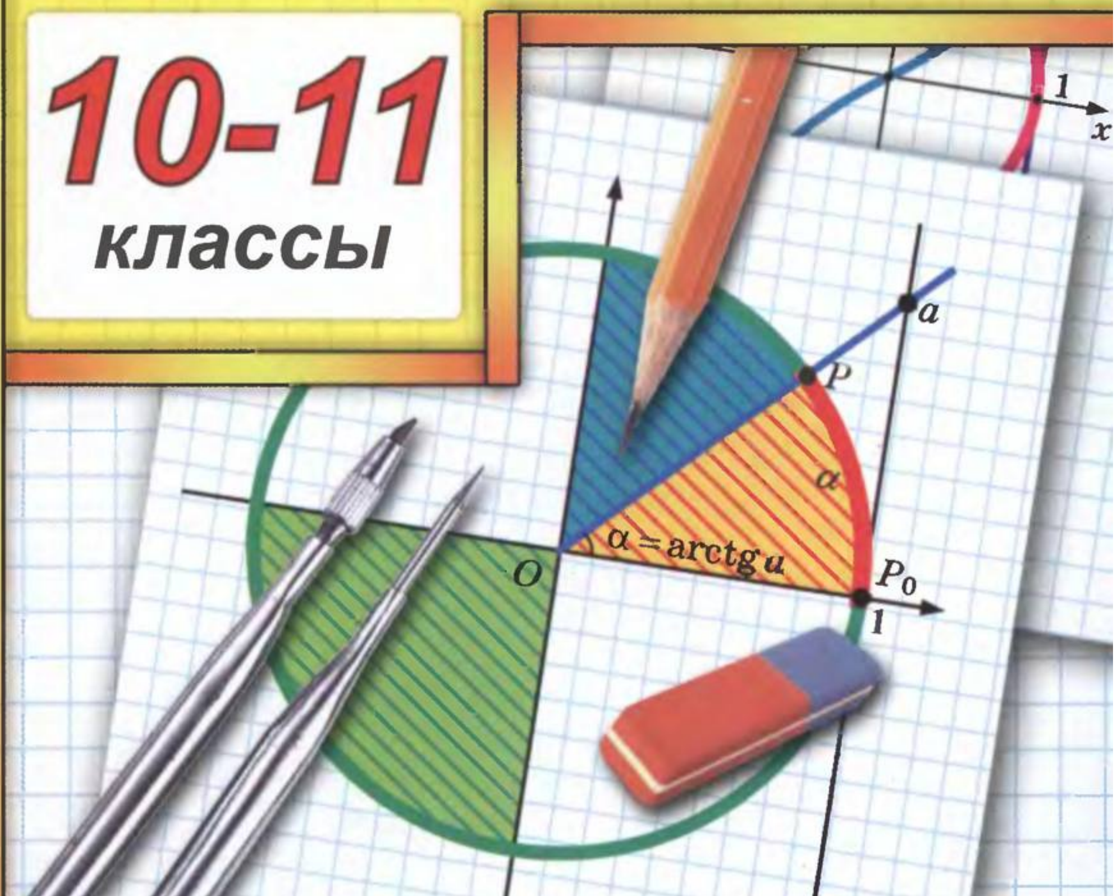
МАТЕМАТИКА

ПРЕДПРОФИЛЬНАЯ И ПРОФИЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА

Г.И. Фалин, А.И. Фалин

ОБРАТНЫЕ тригонометрические ФУНКЦИИ

10–11 классы



ЭКЗАМЕН®

Предпрофильная и профильная подготовка

Г.И. Фалин, А.И. Фалин

Обратные тригонометрические функции

10–11 классы

Определения обратных тригонометрических функций

Свойства arc-функций

Примеры решения задач

Задачи для самостоятельного решения

Ответы

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2012

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ф19

Фалин, Г.И.

Ф19 Обратные тригонометрические функции. 10–11 классы / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 221, [3] с. (Серия «Предпрофильная и профильная подготовка»)

ISBN 978-5-377-04300-3

В книге подробно изложена теория обратных тригонометрических функций. На примере задач, предлагавшихся на вступительных испытаниях по математике в МГУ им. М.В. Ломоносова (как основных, так и предварительных) и различных олимпиадах, изложены основные методы решения задач на обратные тригонометрические функции.

Для самостоятельного решения в брошюре собраны задачи вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ. Задачи сгруппированы по типам, что позволяет составить представление о характере и сложности экзаменационных задач на обратные тригонометрические функции. Ко всем задачам даны ответы.

Книга будет полезна абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам по математике в ВУЗы и выпускникам средних школ, претендующим на высокую оценку по ЕГЭ.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 373:51
ББК 22.1я72

Подписано в печать 06.09.2011.
Формат 84x108/32. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 3,37. Усл. печ. л. 11,76. Тираж 3000 экз. Заказ № 11989.

ISBN 978-5-377-04300-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКЦИИ

Математика — королева
и служанка всех наук.
К.Ф. Гаусс

Жизнь украшается двумя вещами —
занятием математикой и ее преподаванием
С. Пуассон

Уважаемый старшеклассник!

Вы держите в руках книгу новой серии «Предпрофильная и профильная подготовка», созданной в издательстве «Экзамен» для тех, кому интересна математика.

Книги этой серии помогут Вам изучить отдельные разнообразные разделы школьной математики. Наша цель — изложить их абсолютно понятно не только хорошо успевающим по математике школьникам, но и стремящимся стать такими.

Мы хотим донести до Вас суть представленных математических тем, исчерпывающую законченность (завершенность) математических доказательств, логику и красоту решений.

Отобранные нами для этой серии авторы — профессионалы математики: кандидаты и доктора наук, преподаватели МГУ им. М.В. Ломоносова, курирующие преподавание математики в России, а также талантливые титулованные учителя. Сведения о них Вы найдете на четвертой сторонке обложки.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обратные тригонометрические функции часто встречаются в высшей математике (например, интеграл от дробно-рациональной функции), вообще говоря, содержит арктангенс, в теории вероятностей известен «закон арксинуса» и т.д.). Задачи по этой теме регулярно предлагаются на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения и различных олимпиадах. Поэтому школьнику, желающему продолжить свое образование, нужно хорошо усвоить этот раздел тригонометрии.

Обратные тригонометрические функции считаются довольно сложной темой как в школьном курсе математики, так и при подготовке к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения. По нашему мнению, причина этого заключается в том, что школьные учебники, многочисленные методические пособия, пособия для абитуриентов излагают соответствующую теорию довольно формально. Систематическое использование графиков и геометрических представлений для определения arc-функций и решения соответствующих задач позволяет добиться хорошего понимания сути этой теории и выработать твердые навыки решения задач. Именно в этом заключается основное отличие первой и второй глав нашей работы (которые посвящены изложению теории обратных тригонометрических функций) от других аналогичных методических работ. Чтобы показать серьезные применения теории обратных тригонометрических функций, мы изложили начала теории многочленов Чебышева.

Читателя не должно смущать обилие различных и не очень простых формул, связывающих значения различных обратных тригонометрических функций. Запоминать эти формулы не обязательно. Важно хорошо понять методику получения этих формул, чтобы при необходимости читатель смог самостоятельно вывести нужную ему формулу, опираясь только на знание основ тригонометрии. По этой причине, как правило, при выводе аналогичных формул мы не ограничиваемся формальными ссылками на ранее проведенные рассуждения, а приводим подробные доказательства.

В третьей главе на примере реальных экзаменационных задач и задач различных олимпиад изложены основные методы решения задач на обратные тригонометрические функции. Задачи для этой главы отобраны на основе тщательного анализа условий и методов решений задач по тригонометрии, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МГУ им. М.В. Ломоносова, факультетских олимпиадах (которые фактически являются предварительными экзаменами). Рассмотрены также задачи заочных туров и тестов, задачи выпускных экзаменов подготовительного отделения, задачи Московских математических и других олимпиад. Задачи, разобранные в третьей главе, являются наиболее характерными, трудными и теоретически важными. Эта глава дает представление о характере и сложности экзаменационных задач, основных идеях, на которых базируются методы их решения.

При работе над книгой мы использовали сборники вариантов письменных экзаменов по математике в МГУ, которые ежегодно публикуются (вместе с краткими решениями) механико-математическим факультетом и факультетом вычислительной математики и кибернетики, однако, как правило, наши решения отличаются от описанных в этих сборниках.

В четвертой главе собраны задачи на обратные тригонометрические функции, предлагавшиеся на вступительных экзаменах на различные факультеты МГУ начиная с 1970 года. Эти задачи предназначены для самостоятельного решения. Ко всем задачам даны ответы.

Для каждой задачи мы указываем факультет, на котором предлагалась задача, год и месяц, когда проводился экзамен (если в упомянутом году экзамен на этот факультет проводился только в июле, то месяц не указывается), номер задачи в варианте. Для названий факультетов используются обычные университетские сокращения: мех-мат. (механико-математический факультет), ВМК (факультет вычислительной математики и кибернетики), физ. (физический факультет) и т.д. Особо отметим следующие сокращения: Севастополь (Черноморский филиал МГУ), Ташкент (филиал МГУ в г.Ташкенте), ФНМ (факультет наук о материалах; ранее он назывался ВКНМ — высший колледж наук о материалах), ФГУ (факультет государственного управления), ФГП (факультет глобальных процессов), ВШБ (высшая школа бизнеса), МШЭ (московская школа экономики), ФФМ (факультет фундаментальной медицины), МК-МГУ (олимпиада «Покори Воробьевы горы», проводимая МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец»).

Несколько слов об обозначениях. Символом R мы обозначаем множество всех действительных чисел, Z — всех целых чисел, Z_+ — неотрицательных целых чисел, N — натуральных чисел.

Книга будет полезна абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам по математике в вузы и выпускникам средних школ, претендующим на высокую оценку по ЕГЭ.

Мы были бы благодарны читателям за советы и пожелания по поводу книги, которые просим направлять по адресу: 119992, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, проф. Г.И. Фалину.

д.ф.м.н., проф. Г.И. Фалин,
к.ф.м.н., доцент А.И. Фалин

ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1.1. Определение функции $y = \operatorname{arctg} x$

Самой простой из обратных тригонометрических функций является функция $y = \operatorname{arctg} x$. Поэтому мы начнем с нее.

Как и другие обратные тригонометрические функции, функция $y = \operatorname{arctg} x$ наиболее естественно возникает при решении простейшего тригонометрического уравнения

$$\operatorname{tg} x = a. \qquad (1.1)$$

Чтобы решить уравнение (1.1), рассмотрим систему

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} x, \\ y = a. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Эта система равносильна уравнению (1.1) в том смысле, что если x_0 — корень уравнения (1.1), то пара $(x_0, \operatorname{tg} x_0)$ — решение системы (1.2), а если пара (x_0, y_0) — решение системы (1.2), то x_0 — корень уравнения (1.1), а $y_0 = \operatorname{tg} x_0$. Иначе говоря, между множеством корней уравнения (1.1) и множеством решений системы (1.2) имеется простое взаимно-однозначное соответствие.

Будем решать систему (1.2) графически. Для этого нарисуем на координатной плоскости линии, задаваемые уравнениями $y = \operatorname{tg} x$ (это просто график функции $y = \operatorname{tg} x$) и $y = a$ (это горизонтальная прямая, проведенная на высоте a). Точки пересечения этих линий являются решениями системы (1.2), а проекции этих точек на ось абсцисс — корнями уравнения (1.1). Эти построения проведены на рис. 1.1.

В сущности, рис. 1.1 уже содержит ответ задачи (1.1) в геометрической форме, т.к. на этом рисунке явно изображено множество корней уравнения (1.1). Однако, поскольку исходная задача была сформулирована на алгебраическом языке («решить уравнение»), следует перевести полученный ответ с геометрического языка на алгебраический.

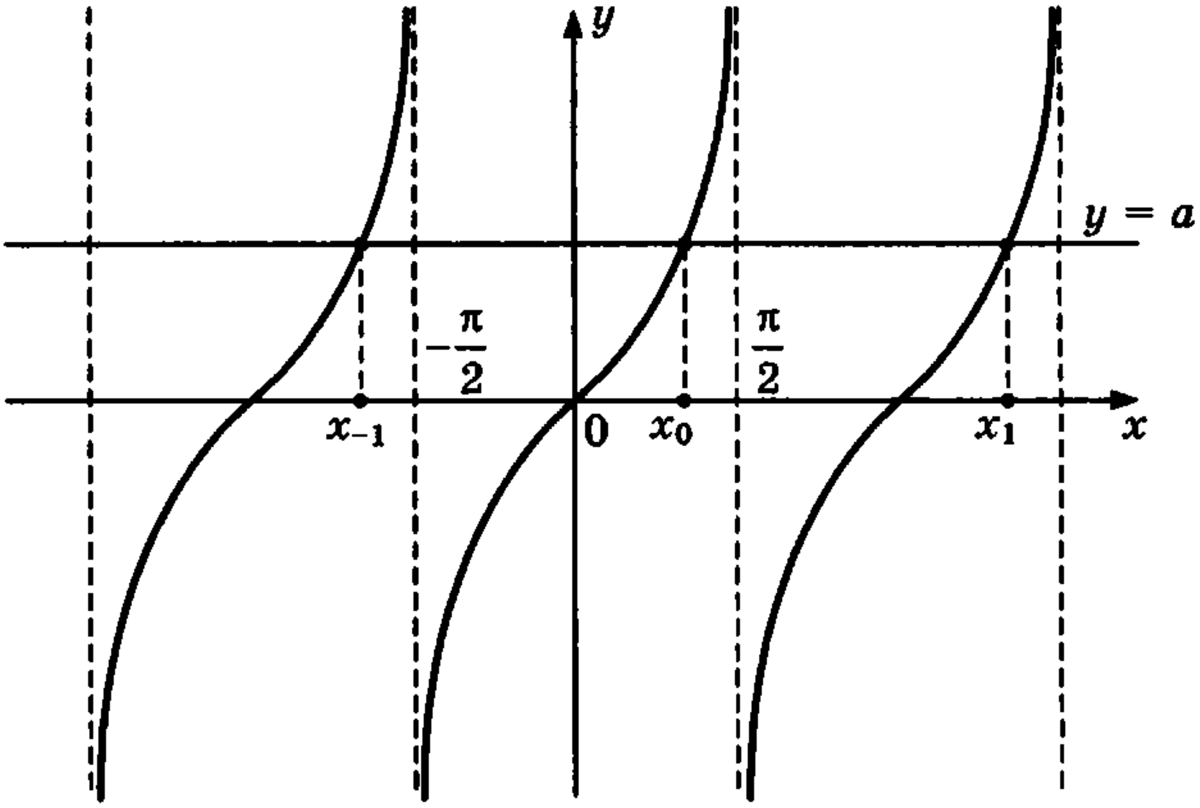


Рис. 1.1. Решение уравнения $\mathrm{tg}\, x = a$

Для этого прежде всего перенумеруем корни:

1) «центральный» корень, который расположен на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, обозначим x_0; поскольку на этом интервале функция $y = \mathrm{tg}\, x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, этот корень всегда существует и единственен;

2) корни, расположенные справа от «центрального», последовательно обозначим x_1, x_2, ..., а корням, расположенным слева от «центрального», присвоим номера -1, -2, ... Таким образом, корень с номером n, где n — некоторое целое число, образуется от пересечения горизонтальной прямой $y = a$ и ветви графика $y = \operatorname{tg} x$, соответствующей $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

Поскольку на этом интервале функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, этот корень всегда существует и притом только один.

Из рис. 1.1 ясно, что расстояние между соседними корнями равно π (т.к. ровно на π отстоят друг от друга ветви графика $y = \operatorname{tg} x$, от пересечения с которыми горизонтальной прямой $y = a$ образуются эти корни):

$$x_n - x_{n-1} = \pi, \; n \in Z.$$

Это равенство влечет справедливость бесконечной совокупности обычных числовых равенств (мы включили в их число и тривиальное равенство $x_0 = x_0 + 0 \cdot \pi$):

$$\begin{aligned}
&x_0 = x_0 + 0 \cdot \pi, \\
&x_1 = x_0 + 1 \cdot \pi, \\
&x_2 = x_1 + \pi = x_0 + 2\pi, \\
&x_3 = x_2 + \pi = x_0 + 3\pi, \\
&\ldots \\
&x_{-1} = x_0 - \pi = x_0 + (-1) \cdot \pi, \\
&x_{-2} = x_{-1} - \pi = x_0 - 2\pi = x_0 + (-2) \cdot \pi, \\
&\ldots
\end{aligned} \qquad (1.3)$$

Бесконечную совокупность числовых равенств (1.3) можно задать одной условной формулой. Для этого отметим, что в левых частях уравнений (1.3) стоят перенумерованные корни уравнения (1.1). Правые части утверждают, что для получения корня x_n с номером $n \in Z$ нужно сложить два числа:

1. первое слагаемое — это «центральный» корень x_0;
2. второе слагаемое — это число, кратное π, причем коэффициент, на который нужно умножить π, — в точности номер корня.

Поэтому вместо бесконечной совокупности формул (1.3) можно использовать одну формулу

$$x_n = x_0 + \pi n,\ n \in Z. \tag{1.4}$$

«Центральный» корень x_0, через который выражаются все остальные корни уравнения (1.1), играет тем самым особую роль, и поэтому математики ввели для него особое обозначение: arctg a. С учетом этого обозначения соотношение (1.4) примет привычный вид:

$$x_n = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z. \tag{1.5}$$

Поскольку наша цель — изучение обратных тригонометрических функций, сформулируем определение arctg a более четко.

Определение 1. arctg a *— это такое число x, что*

1. $\operatorname{tg} x = a$;

2. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Первая часть этого определения говорит, что arctg a — корень уравнения $\operatorname{tg} x = a$; вторая означает, что arctg a — «центральный» корень.

Изложенная выше теория позволяет утверждать, что справедлива

Теорема 1.1. *Число* arctg *a* *определено и притом однозначно при любом* $a \in R$.

Формальное алгебраическое определение arctg *a* можно проиллюстрировать с помощью рис. 1.2 (это просто фрагмент рис. 1.1).

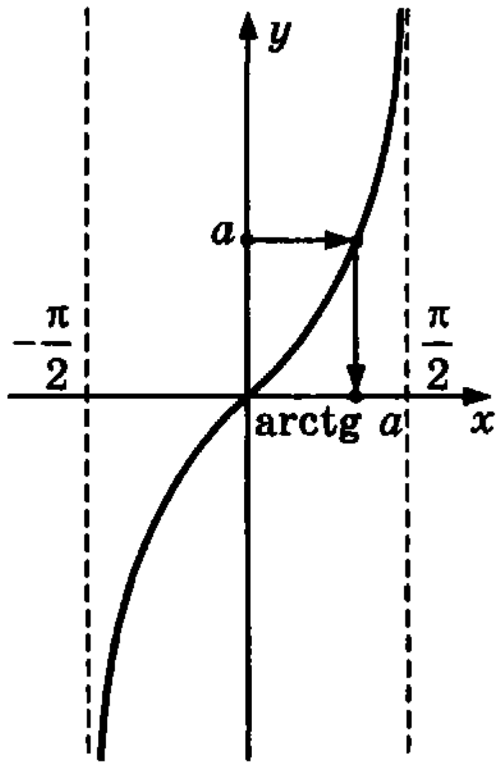


Рис. 1.2. Графическое определение arctg *a*

Этот рисунок можно рассматривать и как другую форму записи определения 1 (на графическом языке), а не как его иллюстрацию.

Рисунки 1.1, 1.2 и аналогичные рисунки для arcctg *a*, arcsin *a*, arccos *a* (см. ниже) являются основой графического метода решения разнообразных задач на обратные тригонометрические функции.

В качестве примера вычислим arctg (tg 7). Для этого на координатной плоскости (рис. 1.3) последовательно изобразим:

1. число 7 — это точка на оси абсцисс, расположенная между точками 2π и $\frac{5\pi}{2}$ (неравенство

$2\pi < 7 < \dfrac{5\pi}{2}$ равносильно неравенству $2{,}8 < \pi < 3{,}5$, которое истинно);

2. число tg 7 — это высота «столбика» под графиком функции $y = \operatorname{tg} x$, который «торчит» из точки 7 на оси абсцисс.

Чтобы найти arctg(tg 7) в соответствии с рис. 1.1 или рис. 1.2, нужно провести горизонтальную прямую на высоте tg 7 до пересечения с «центральной» ветвью графика $y = \operatorname{tg} x$, т.е. ветвью соответствующей $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, и спроектировать полученную точку пересечения на ось абсцисс. Все это проделано на рис. 1.3.

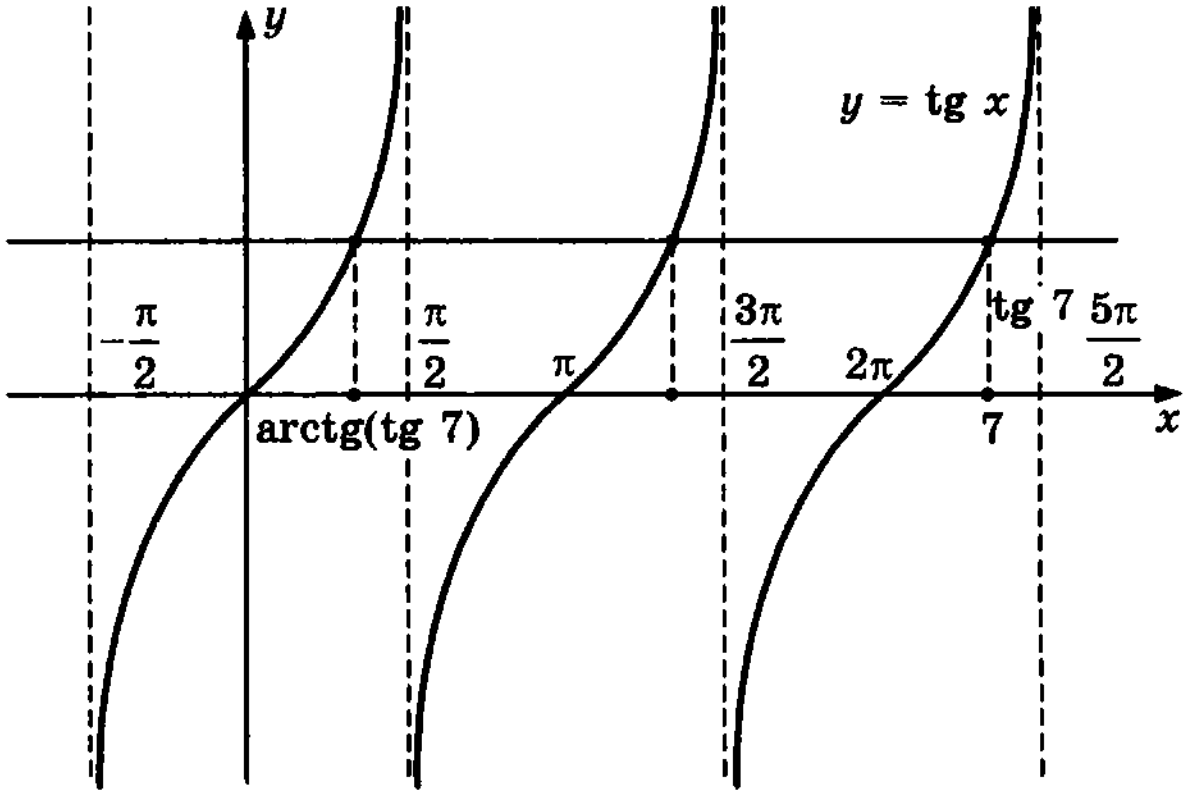


Рис. 1.3. Вычисление числа arctg(tg 7)

Из рис. 1.3 ясно, что число 7 является корнем уравнения $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 7$ под номером 2 (вспомним рис. 1.1). Как мы установили (см. равенства (1.3) или

(1.4)), $x_2 = x_0 + 2\pi$. В нашей ситуации это означает, что $7 = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,7) + 2\pi$, т.е. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,7) = 7 - 2\pi$.

Этот результат можно получить и без ссылки на равенства (1.3) или (1.4), если на рис. 1.3 отметить очевидное равенство длин отрезков [0; arctg(tg 7)] и [2π; 7], что означает справедливость равенства

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,7) - 0 = 7 - 2\pi \Leftrightarrow \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,7) = 7 - 2\pi.$$

Еще одна возможность наглядной иллюстрации arctg a связана с геометрической интерпретацией tg x с помощью тригонометрической окружности. Напомним, что tg x можно представлять себе следующим образом (рис. 1.4).

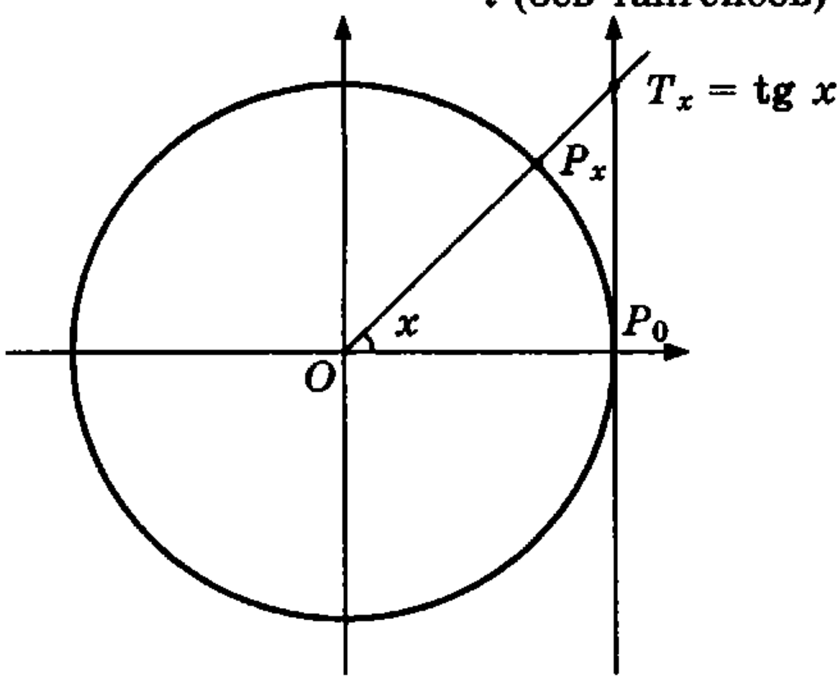


Рис. 1.4. Определение tg x с помощью тригонометрической окружности

Возьмем точку $P_0 = (1;\ 0)$ и повернем ее на угол x (радиан) вокруг начала координат. В результате мы получим точку P_x единичной окружности. Поскольку угол P_xOP_0 измеряется радианами, а радиус окружности равен 1, длина дуги P_0P_x равна x (линейных единиц). Поэтому вместо поворота на угол x можно говорить о движении точки P_0 по единичной окружности на расстояние x.

Теперь соединим начало координат с точкой P_x и продолжим отрезок OP_x до пересечения с вертикальной прямой l, проходящей через точку P_0. Обозначим точку пересечения через T_x. Тогда длина отрезка P_0T_x (с учетом знака «минус», если точка T_x расположена в нижней полуплоскости) равна $\operatorname{tg} x$. Другими словами, $\operatorname{tg} x$ — это ордината точки T_x.

Если на прямой l задать направление как указано на рис. 1.4 и выбрать в качестве начала точку P_0, то эту прямую можно рассматривать как числовую ось — ось тангенсов. На этой оси точка T_x непосредственно изображает $\operatorname{tg} x$.

С учетом вышеизложенного, $\operatorname{arctg} a$ можно иллюстрировать (а на самом деле геометрически и определять) с помощью тригонометрической окружности следующим образом (рис. 1.5).

Отметим на оси тангенсов точку a и соединим ее с началом координат O. Отрезок Oa пересечет правую половину тригонометрической окружности в некоторой точке P.

Тогда $\operatorname{arctg} a$ — это величина угла POP_0, измеренного в радианах, с учетом знака (т.е. при $a < 0$ обычная геометрическая мера угла POP_0, которая положительна, равна $-\operatorname{arctg} a$).

С равным успехом под $\operatorname{arctg} a$ можно понимать длину дуги P_0P (с учетом знака). Этот факт объясняет сам термин arctg — «дуга тангенса» (arc — дуга; вспомните русское слово «арка»).

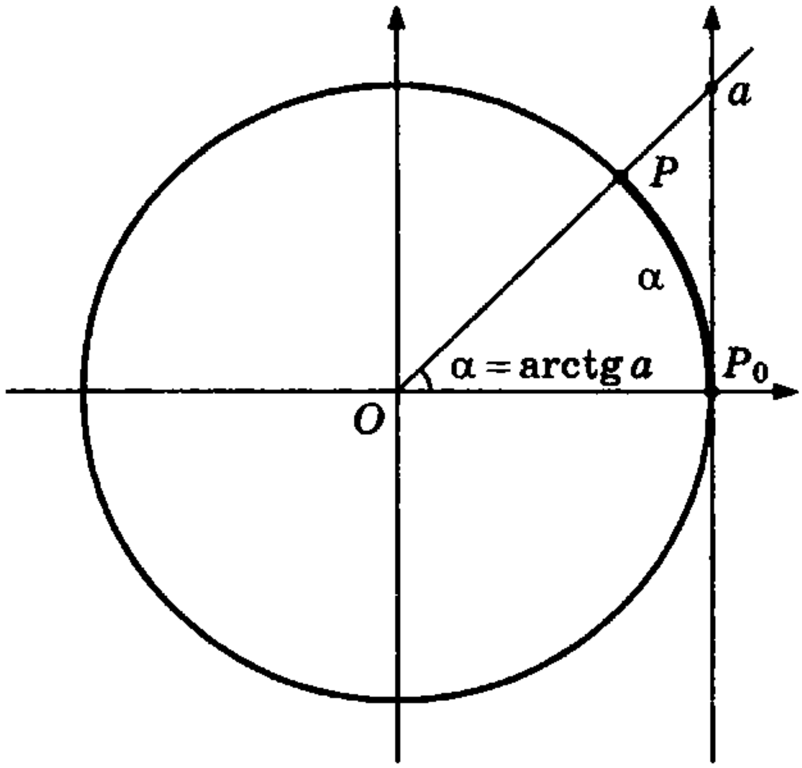


Рис. 1.5. Геометрическое определение arctg a на тригонометрической окружности

Поскольку arctg a однозначно определен для любого $a \in R$, можно говорить о функции $y = \operatorname{arctg} x$, область определения которой — вся числовая прямая.

В силу основного определения 1 равенство $y = \operatorname{arctg} x$ равносильно системе

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} y, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Поэтому функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной к сужению функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Соответственно, ее график получается из ветви графика функции $y = \operatorname{tg} x$, соответствующей $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, осевой симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 1.6).

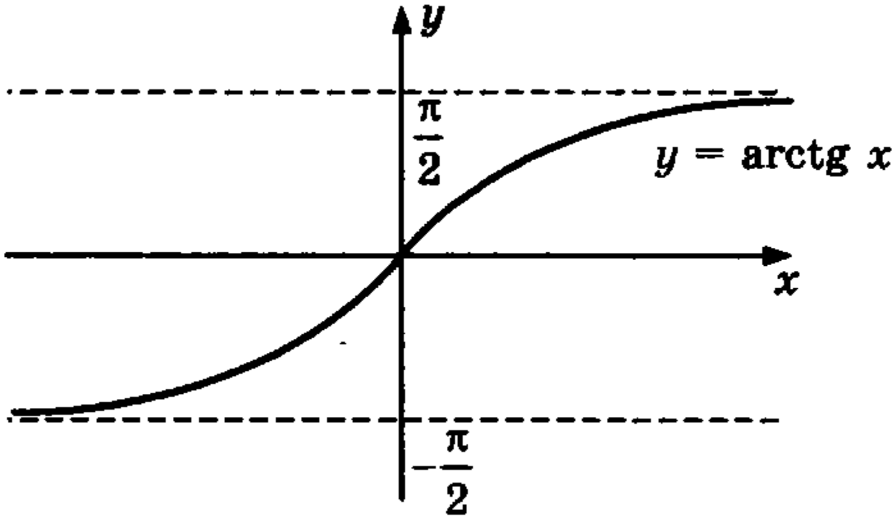


Рис. 1.6. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

Однако часто удобнее представлять себе график функции $y = \operatorname{arctg} x$ по-другому, как центральную ветвь графика $y = \operatorname{tg} x$, которую повернули на $90°$ и отобразили симметрично относительно оси абсцисс (или оси ординат).

Действительно, система (1.6) говорит, что для построения графика $y = \operatorname{arctg} x$ нужно

1. нарисовать график зависимости $x = \operatorname{tg} y$. Это можно сделать, повернув лист бумаги так, чтобы ось y-в стала горизонтальной, как это обычно имеет место для оси, на которой меняется независимая переменная (для полноты соответствия обычной ситуации нужно смотреть на лист бумаги с обратной стороны, чтобы ось y-в была направлена вправо);
2. взять часть этого графика, соответствующую $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

В зависимости от ситуации при решении задач, в которых фигурирует $\operatorname{arctg} x$, приходится использовать либо формально-алгебраическое определение 1, либо его графический вариант, представленный на рисунках 1.1, 1.2, либо геометрический вариант определения, представленный на рис. 1.4, либо график функции $y = \operatorname{arctg} x$, изображенный на рис. 1.6. **По-настоящему понять теорию обратных тригонометрических функций и научиться уверенно решать разнообразные экзаменационные задачи по этой теме можно, лишь усвоив эти четыре точки зрения на один и тот же объект.**

1.2. Определение функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Теория функции $y = \operatorname{arcctg} x$ практически дословно повторяет теорию функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Как и $\operatorname{arctg} x$, функция $y = \operatorname{arcctg} x$ наиболее естественно возникает при решении простейшего тригонометрического уравнения

$$\operatorname{ctg} x = a, \tag{1.7}$$

что, в свою очередь, сводится к нахождению точек пересечения графиков функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$. Геометрически эта задача полностью решена на рис. 1.7.

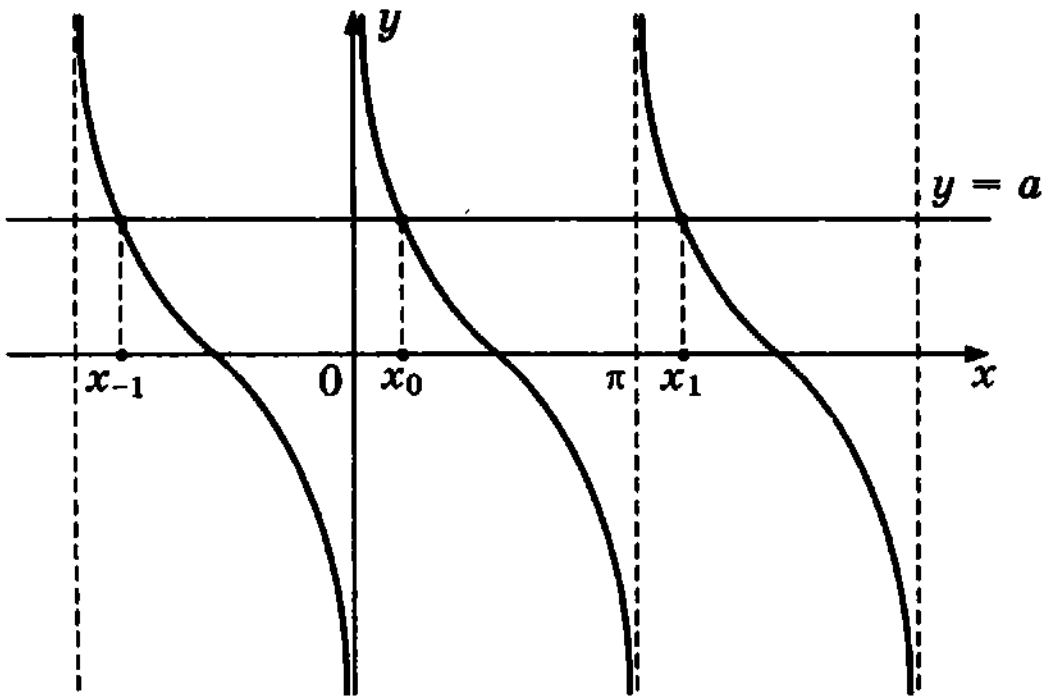


Рис. 1.7. Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$

Роль «центральной» ветви в случае котангенса играет ветвь, соответствующая $x \in (0; \pi)$. На этом интервале функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому на этом интервале всегда существует и притом один корень уравнения (1.7), который мы обозначим x_0.

Остальные корни естественным образом могут быть занумерованы целыми числами: корень с номером n, где n — некоторое целое число, образуется от пересечения горизонтальной прямой $y = a$ и ветви графика $y = \operatorname{ctg} x$, соответствующей $x \in \left(\pi n; \pi(n+1)\right)$.

При этом все корни могут быть выражены через «центральный» по формуле

$$x_n = x_0 + \pi n, n \in Z. \qquad (1.8)$$

«Центральный» корень x_0, через который выражаются все остальные корни уравнения (1.7), обозначается $\operatorname{arcctg} a$, что позволяет записать соотношение (1.8) в привычном виде:

$$x_n = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z. \qquad (1.9)$$

Точное определение $\operatorname{arcctg} a$ выглядит следующим образом.

Определение 2. $\operatorname{arcctg} a$ — *это такое число* x, *что*

1. $\operatorname{ctg} x = a$;

2. $x \in (0; \pi)$.

Изложенная выше теория позволяет утверждать, что справедлива

Теорема 1.2. *Число* $\operatorname{arcctg} a$ *определено и притом однозначно при любом* $a \in R$.

Формальное алгебраическое определение $\operatorname{arcctg} a$ можно проиллюстрировать с помощью рис. 1.8 (это просто фрагмент рис. 1.7).

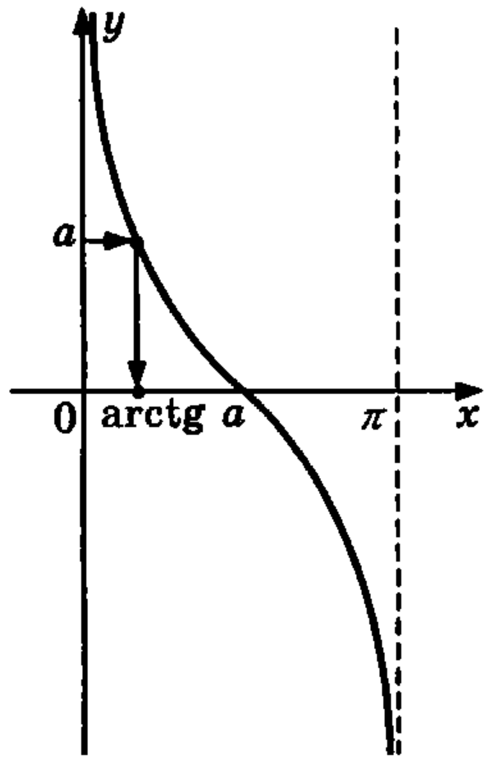


Рис. 1.8. Графическое определение arcctg a

Этот рисунок можно рассматривать и как другую форму записи определения 2 (на графическом языке), а не как его иллюстрацию.

Как и для arctg a, еще одна возможность наглядной иллюстрации arcctg a связана с иллюстрацией ctg x с помощью тригонометрической окружности (рис. 1.9).

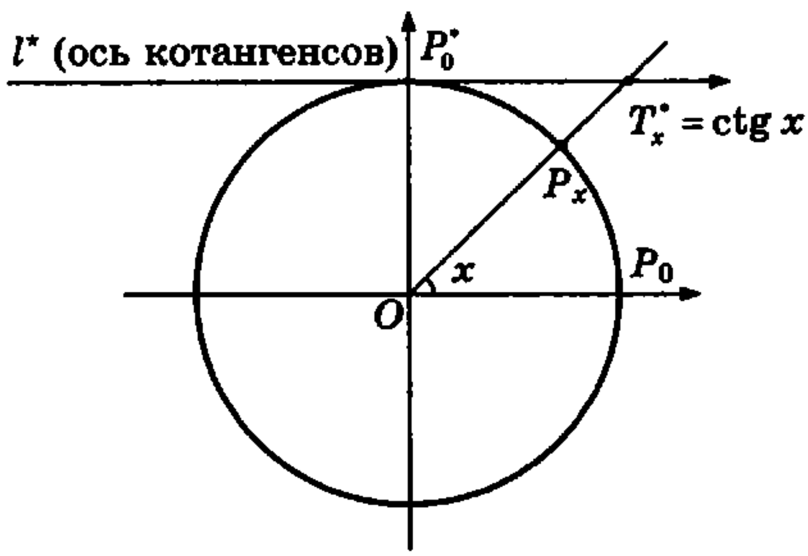


Рис. 1.9. Определение ctg x с помощью тригонометрической окружности

Возьмем точку $P_0 = (1; 0)$ и повернем ее на угол x (радиан) вокруг начала координат. В результате мы получим точку P_x единичной окружности. Поскольку угол P_xOP_0 измеряется радианами, а радиус окружности равен 1, длина дуги P_0P_x равна x (линейных единиц). Поэтому вместо поворота на угол x можно говорить о движении точки P_0 по единичной окружности на расстояние x.

Теперь соединим начало координат с точкой P_x и продолжим отрезок OP_x до пересечения с горизонтальной прямой l^*, проходящей через точку $P_0^* \equiv P_{\frac{\pi}{2}}$ с координатами (0; 1). Обозначим точку пересечения через T_x^*. Тогда длина отрезка $P_0^*T_x^*$ (с учетом знака «минус», если точка T_x^* расположена в левой полуплоскости) равна ctg x. Другими словами, ctg x — это абсцисса точки T_x^*.

Если на прямой l^* задать направление как указано на рис. 1.9 и выбрать в качестве начала точку P_0^*, то эту прямую можно рассматривать как числовую ось — ось котангенсов. На этой оси точка T_x^* непосредственно изображает ctg x.

Поэтому arcctg a можно иллюстрировать (а на самом деле геометрически и определять) с помощью тригонометрической окружности следующим образом (рис. 1.10).

Отметим на оси котангенсов точку a и соединим ее с началом координат O. Отрезок Oa пересечет верхнюю половину тригонометрической окружности в некоторой точке P.

Тогда arcctg a — это величина угла POP_0, измеренного в радианах.

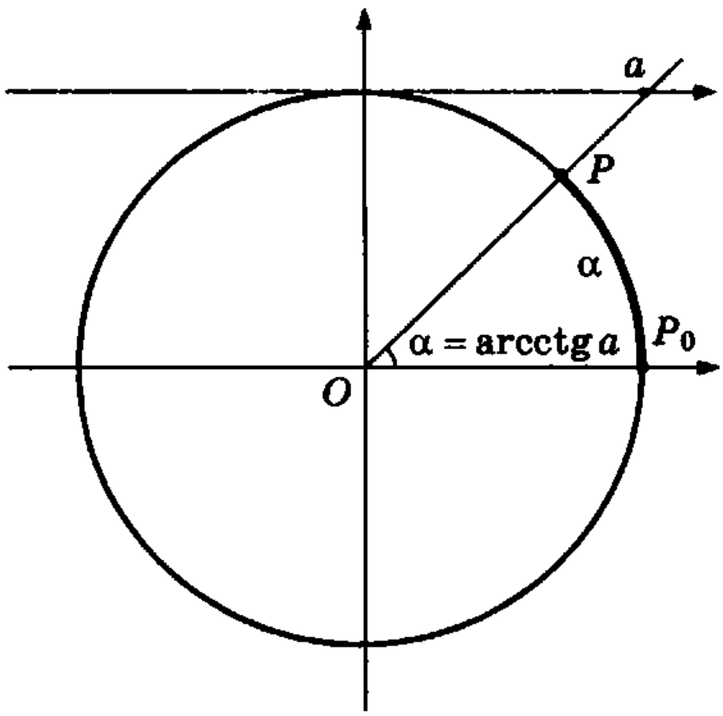


Рис. 1.10. Геометрическое определение arcctg a на тригонометрической окружности

С равным успехом под arcctg a можно понимать длину дуги P_0P.

Поскольку arcctg a однозначно определен для любого $a \in R$, можно говорить о функции $y = \operatorname{arcctg} x$, область определения которой — вся числовая прямая.

В силу основного определения 2 равенство $y = \operatorname{arcctg} x$ равносильно системе

$$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} y, \\ 0 < y < \pi. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Поэтому функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной к сужению функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервал $(0; \pi)$. Соответственно, ее график получается из ветви графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, соответствующей $x \in (0; \pi)$, осевой симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 1.11).

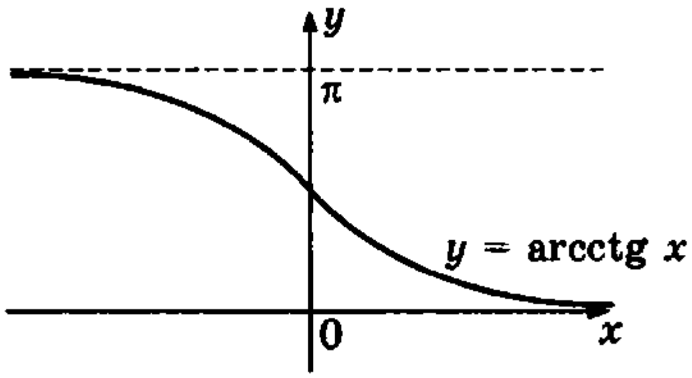


Рис. 1.11. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Однако часто удобнее представлять себе график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ по-другому, как центральную ветвь графика $y = \operatorname{ctg} x$, которую повернули на 90° и отобразили симметрично относительно оси ординат. Этот же результат можно получить, если повернуть лист бумаги, на котором изображен график функции $y = \operatorname{ctg} x$ так, чтобы ось y стала горизонтальной, а ось x — вертикальной, и посмотреть на рисунок с обратной стороны листа (тогда новая ось абсцисс будет направлена вправо).

В зависимости от ситуации при решении задач, в которых фигурирует $\operatorname{arcctg} x$, приходится использовать либо формально-алгебраическое определение 2, либо его графический вариант, представленный на рисунках 1.7, 1.8, либо геометрический вариант определения, представленный на рис. 1.9, либо график функции $y = \operatorname{arcctg} x$, изображенный на рис. 1.11.

1.3. Определение функции $y = \arcsin x$

Теория функции $y = \arcsin x$ практически дословно повторяет теорию функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$. Однако в этом случае возникают и важные отличия.

Как и другие arc-функции, функция $y = \arcsin x$ наиболее естественно возникает при решении простейшего тригонометрического уравнения

$$\sin x = a, \tag{1.11}$$

что, в свою очередь, сводится к нахождению точек пересечения графиков функций $y = \sin x$ и $y = a$. Геометрически эта задача полностью решена на рис. 1.12.

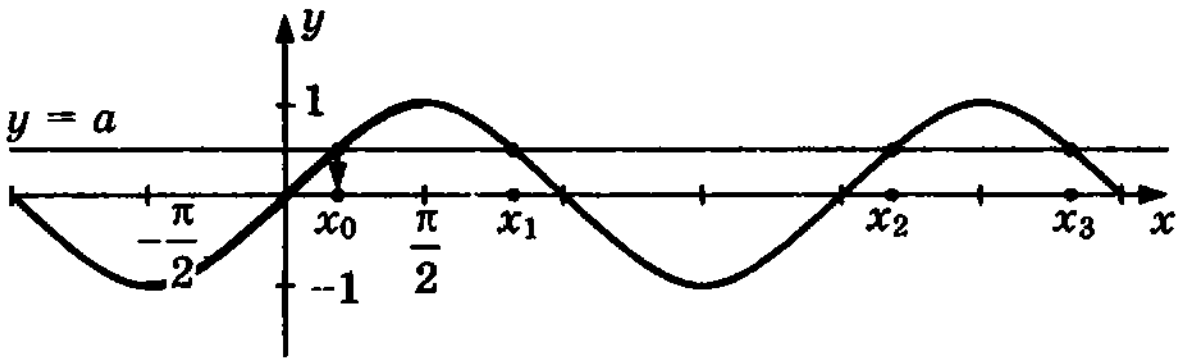


Рис. 1.12. Решение уравнения $\sin x = a$

Из рис. 1.12 ясно, что при $a > 1$ или $a < -1$ уравнение (1.11) не имеет корней, а при $-1 \le a \le 1$ имеет бесконечно много корней, которые естественным образом могут быть занумерованы целыми числами.

Роль «центральной» ветви в случае синуса играет ветвь (часть графика), соответствующая $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

На этом интервале функция $y = \sin x$ монотонно возрастает от -1 до $+1$. Поэтому на этом отрезке всегда существует и притом один корень уравнения (1.11), который мы обозначим x_0.

Если $-1 < a < 1$, корень уравнения (1.11) с номером n, где n — некоторое целое число, образуется от пересечения с горизонтальной прямой $y = a$ ветви графика $y = \sin x$, соответствующей $x \in \left[\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n + \frac{\pi}{2}\right]$

(при четном n функция $y = \sin x$ монотонно возрастает, а при нечетном — монотонно убывает).

Из периодичности функции $y = \sin x$ ясно, что все корни x_n с четными номерами (когда $n = 2k$ для некоторого целого k) могут быть выражены через «центральный» корень x_0 по формуле

$$x_{2k} = x_0 + 2\pi k, \quad k \in Z, \tag{1.12}$$

а корни x_n с нечетными номерами (когда $n = 2k + 1$ для некоторого целого k) могут быть выражены через корень x_1 по формуле

$$x_{2k+1} = x_1 + 2\pi k, \quad k \in Z. \tag{1.13}$$

Далее, известное тригонометрическое тождество $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ на геометрическом языке означает, что вертикальная прямая $x=\frac{\pi}{2}$ является осью симметрии графика функции $y = \sin x$. Из этой симметрии синусоиды следует, что точка $\frac{\pi}{2}$ — середина отрезка $[x_0; x_1]$, т.е.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{x_0+x_1}{2},$$

откуда $x_1=\pi-x_0$. Это равенство позволяет переписать соотношение (1.13) в виде

$$x_{2k+1}=\pi-x_0+2\pi k=-x_0+(2k+1)\pi,\ k\in Z. \tag{1.14}$$

Формулы (1.12) и (1.14) полностью описывают множество корней уравнения $\sin x = a$ (в случае $|a|\le 1$). Эти две формулы можно объединить и в одну формулу

$$x_n=(-1)^n x_0+\pi n,\ n\in Z. \tag{1.15}$$

«Центральный» корень x_0, через который выражаются все остальные корни уравнения (1.11), обозначается arcsin a, что позволяет записать соотношение (1.15) в привычном виде:

$$x_n = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (1.16)$$

В случае $a = 1$ из рис. 1.12 ясно, что $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. С другой стороны, т.к. $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, общие формулы (1.12) и (1.14) при $a = 1$ примут вид:

$$x_{2k} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Поэтому множества $\{x_{2k}\}_{k\in Z}$ и $\{x_{2k+1}\}_{k\in Z}$ будут одинаковыми и совпадут с множеством чисел, описываемым равенством $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Поэтому формулу (1.16) можно использовать и при $a = 1$. Однако важно понимать, что в этом случае каждый корень уравнения $\sin x = a$ появится в ходе подсчетов два раза (например, число $\frac{\pi}{2}$ можно получить по формуле (1.16) при $n = 0$ и $n = 1$), т.е. получит два номера.

В случае $a = -1$ из рис. 1.12 ясно, что $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. С другой стороны, т.к. $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, общие формулы (1.12) и (1.14) при $a = -1$ примут вид:

$$x_{2k} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$x_{2k+1} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(k+1).$$

Поэтому множества $\{x_{2k}\}_{k\in Z}$ и $\{x_{2k+1}\}_{k\in Z}$ будут одинаковыми и совпадут с множеством чисел, описываемым равенством $x_n = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$. Поэтому формулу (1.16) можно использовать и при $a = -1$. Однако, как и для $a = 1$, важно понимать, что в этом случае каждый корень уравнения $\sin x = a$ появится в ходе подсчетов два раза (например, число $-\dfrac{\pi}{2}$ можно получить по формуле (1.16) при $n = 0$ и $n = -1$), т.е. получит два номера.

Точное определение $\arcsin a$ выглядит следующим образом.

Определение 3. $\arcsin a$ — *это такое число* x, *что*

1. $\sin x = a$;

2. $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Изложенная выше теория позволяет утверждать, что справедлива

Теорема 1.3. *Число* $\arcsin a$ *определено и притом однозначно тогда и только тогда, когда* $a \in [-1; 1]$.

Формальное алгебраическое определение $\arcsin a$ можно проиллюстрировать с помощью рис. 1.13 (это просто фрагмент рис. 1.12).

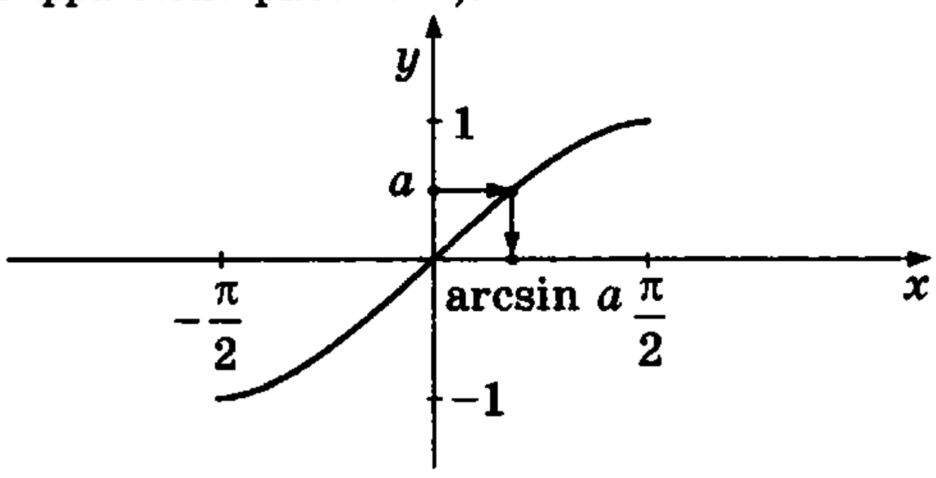


Рис. 1.13. Графическое определение $\arcsin a$

Этот рисунок можно рассматривать и как другую форму записи определения 3 (на графическом языке), а не как его иллюстрацию.

Еще одна возможность наглядной иллюстрации arcsin a связана с определением sin x с помощью тригонометрической окружности. Напомним, что sin x — это ордината точки P_x на единичной окружности (P_x — образ точки $P_0 = (1; 0)$ при повороте на угол x вокруг начала координат), или, что то же самое, длина отрезка OS_x, где S_x — проекция точки P_x на ось ординат, с учетом знака (рис. 1.14).

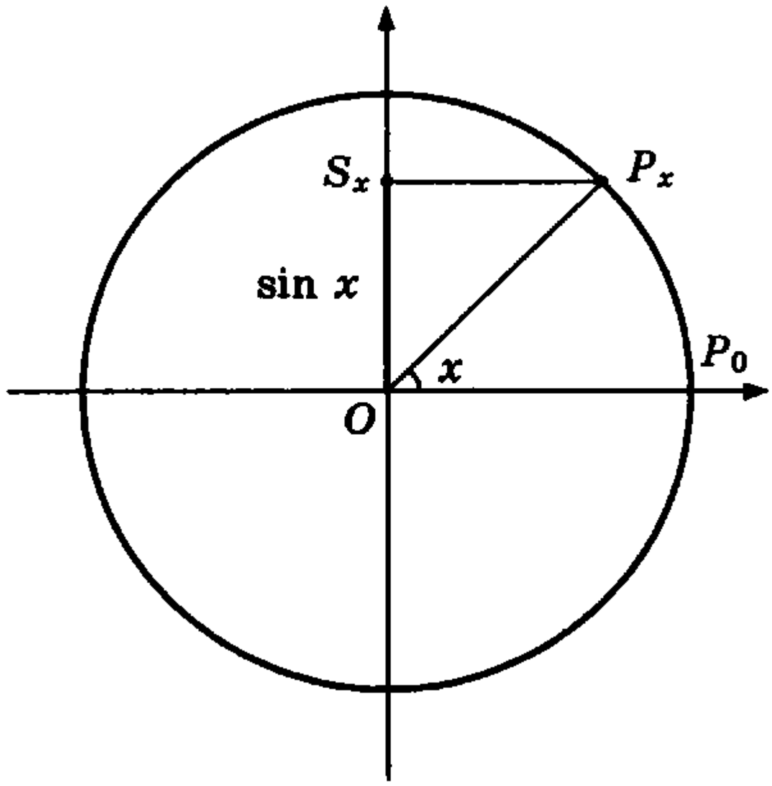


Рис. 1.14. Определение sin x на тригонометрической окружности

Поэтому arcsin a можно иллюстрировать (а на самом деле геометрически и определять) с помощью тригонометрической окружности следующим образом (рис. 1.15).

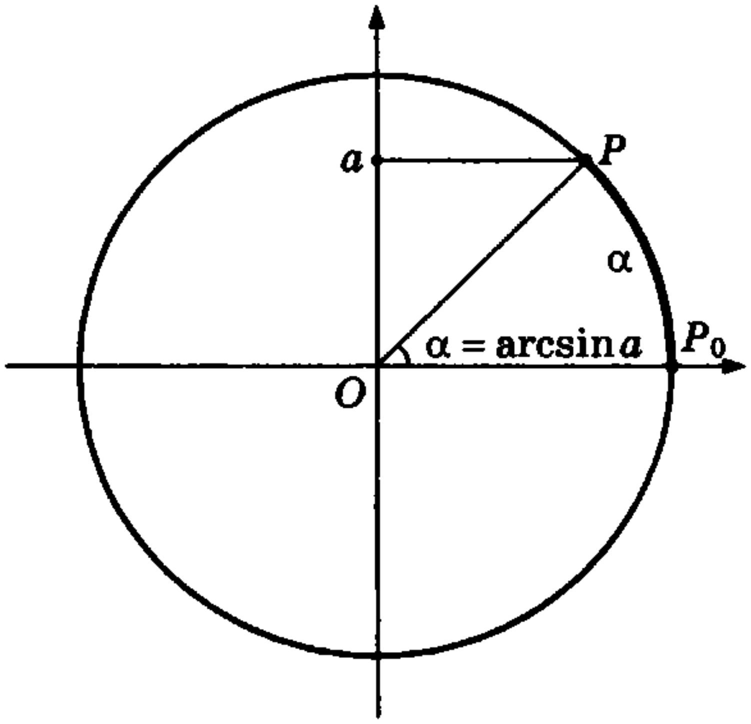


Рис. 1.15. Определение arcsin a
на тригонометрической окружности

Отметим на оси ординат точку a и проведем через нее прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечет правую половину тригонометрической окружности в некоторой точке P.

Тогда arcsin a — это величина угла POP_0, измеренного в радианах (с учетом знака).

С равным успехом под arcsin a можно понимать длину дуги P_0P.

Поскольку arcsin a однозначно определен для любого $a \in [-1; 1]$, можно говорить о функции y = arcsin x, область определения которой — отрезок $[-1; 1]$.

В силу основного определения 3 равенство y = arcsin x равносильно системе

$$\begin{cases} x = \sin y, \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad (1.17)$$

Поэтому функция $y = \arcsin x$ является обратной к сужению функции $y = \sin x$ на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Соответственно, ее график получается из ветви (т.е. части) графика функции $y = \sin x$, соответствующей $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, осевой симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 1.16).

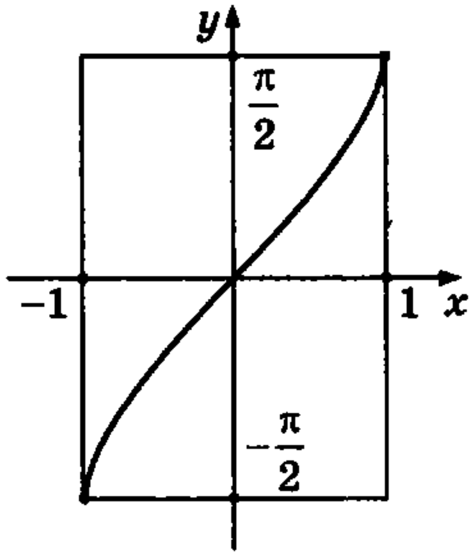


Рис. 1.16. График функции $y = \arcsin x$

Однако часто удобнее представлять себе график функции $y = \arcsin x$ по-другому, как центральную ветвь графика $y = \sin x$, которую повернули на 90° и отобразили симметрично относительно оси ординат. Этот же результат можно получить, если повернуть лист бумаги, на котором изображен график функции $y = \sin x$ так, чтобы ось y стала горизонтальной, а ось x — вертикальной, и посмотреть на рисунок с обратной стороны листа (тогда новая ось абсцисс будет направлена вправо).

При этом полезно помнить, что график функции $y = \arcsin x$ расположен в прямоугольнике $-1 \le x \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (этот прямоугольник изображен на рис. 1.16).

В зависимости от ситуации при решении задач, в которых фигурирует $\arcsin x$, приходится использовать либо формально-алгебраическое определение 3, либо его графический вариант, представленный на рисунках 1.12, 1.13, либо геометрический вариант определения, представленный на рис. 1.15, либо график функции $y = \arcsin x$, изображенный на рис. 1.16.

1.4. Определение функции $y = \arccos x$

Теория функции $y = \arccos x$ практически дословно повторяет теорию функций $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, хотя и содержит небольшие нюансы.

Как и другие arc-функции, функция $y = \arccos x$ наиболее естественно возникает при решении простейшего тригонометрического уравнения

$$\cos x = a, \tag{1.18}$$

что, в свою очередь, сводится к нахождению точек пересечения графиков функций $y = \cos x$ и $y = a$. Геометрически эта задача полностью решена на рис. 1.17.

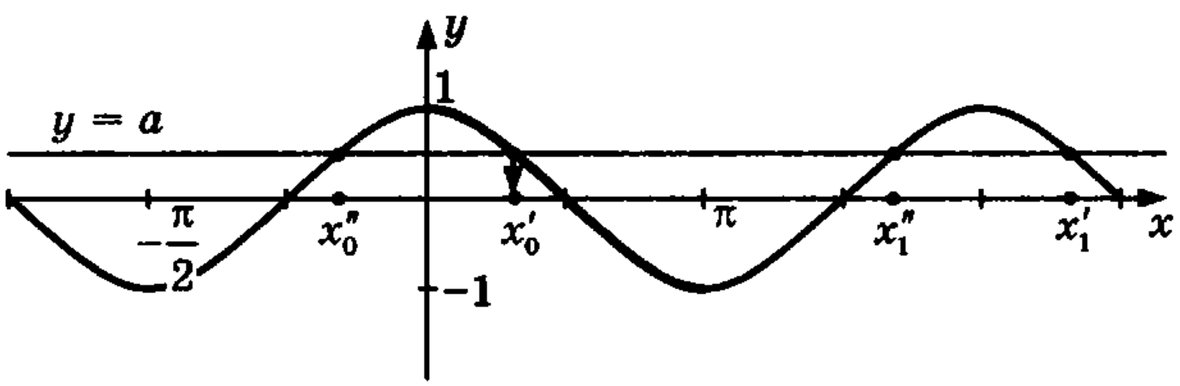


Рис. 1.17. Решение уравнения $\cos x = a$

Из рис. 1.17 ясно, что при $a > 1$ или $a < -1$ уравнение (1.18) не имеет корней, а при $-1 \le a \le 1$ имеет бесконечно много корней. Если $-1 \le a \le 1$, то на каждом отрезке вида $[-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, где n — некоторое целое число, находятся ровно два корня (если $a = 1$, то эти корни совпадают), один слева от точки $2\pi n$, а другой — справа.

Правые и левые корни принято нумеровать независимо. Правый корень из пары, расположенной на отрезке $[-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, обозначают x'_n (на самом деле этот корень лежит на отрезке $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$). Левый корень из пары, расположенной на отрезке $[-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, обозначают x''_n (на самом деле этот корень лежит на отрезке $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$).

На отрезках вида $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ функция $y = \cos x$ монотонно убывает от $+1$ до -1, а на отрезках вида $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ — монотонно возрастает от -1 до $+1$.

Поэтому при $-1 \le a \le 1$ корни x'_n, x''_n всегда существуют и определены однозначно.

Из периодичности функции $y = \cos x$ ясно, что все корни x'_n могут быть выражены через «центральный» корень x'_0 по формуле

$$x'_n = x'_0 + 2\pi n,\ n \in Z, \tag{1.19}$$

а корни x''_n могут быть выражены через корень x''_0 по формуле

$$x''_n = x''_0 + 2\pi n,\ n \in Z. \tag{1.20}$$

Далее, известное тригонометрическое тождество $\cos(-x) = \cos x$ на геометрическом языке означает, что ось ординат является осью симметрии графика функции $y = \cos x$. Из этой симметрии косинусоиды следует, что $x_0'' = -x_0'$. Это равенство позволяет переписать соотношение (1.20) в виде

$$x_n'' = -x_0'' + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (1.21)$$

Формулы (1.19) и (1.21) полностью описывают множество корней уравнения $\cos x = a$ (в случае $|a| \le 1$). Эти две формулы можно объединить и в одну формулу

$$x_n = \pm x_0 + 2\pi n,\ n \in Z, \qquad (1.22)$$

где $x_0 = x_0'$.

«Центральный» корень $x_0 = x_0'$, через который выражаются все остальные корни уравнения (1.18), обозначается $\arccos a$, что позволяет записать соотношение (1.22) в привычном виде:

$$x_n = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (1.23)$$

Если $-1 < a < 1$, то все корни, подсчитанные по формуле (1.23), или, что то же самое, по формулам (1.19) и (1.21), различны.

Если $a = 1$, то непосредственно из рис. 1.17 ясно, что множество корней описывается формулой

$$x_n = 2\pi n,\ n \in Z.$$

С другой стороны, если $a = 1$, то $\arccos a \equiv x_0' = 0$, так что формулы (1.19) и (1.21) примут вид:

$$x_n' = 2\pi n,$$
$$x_n'' = 2\pi n,$$

т.е. два раза зададут тот же самый набор корней. Поэтому формулу (1.23) можно использовать и при

$a = 1$. При этом важно понимать, что тогда каждый корень появится в ходе подсчетов два раза: один раз — как «правый» корень x_n', а второй раз — как «левый» корень x_n''.

Если $a = -1$, то непосредственно из рис. 1.17 ясно, что множество корней описывается формулой

$$x_n = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

С другой стороны, если $a = -1$, то $\arccos a \equiv x_0' = \pi$, так что формулы (1.19) и (1.21) примут вид:

$$x_n' = \pi + 2\pi n,$$

$$x_n'' = -\pi + 2\pi n = \pi + 2\pi(n-1),$$

т.е. два раза зададут тот же самый набор корней. Поэтому формулу (1.23) можно использовать и при $a = -1$. При этом важно понимать, что тогда каждый корень появится в ходе подсчетов два раза: один раз — как «правый» корень x_n', а второй раз — как «левый» корень x_{n+1}''.

Точное определение arccos a выглядит следующим образом.

Определение 4. arccos a — *это такое число x, что*

1. $\cos x = a$;

2. $x \in [0; \pi]$.

Изложенная выше теория позволяет утверждать, что справедлива

Теорема 1.4. *Число* arccos a *определено и притом однозначно тогда и только тогда, когда* $a \in [-1; 1]$.

Формальное алгебраическое определение arccos a можно проиллюстрировать с помощью рис. 1.18 (это просто фрагмент рис. 1.17).

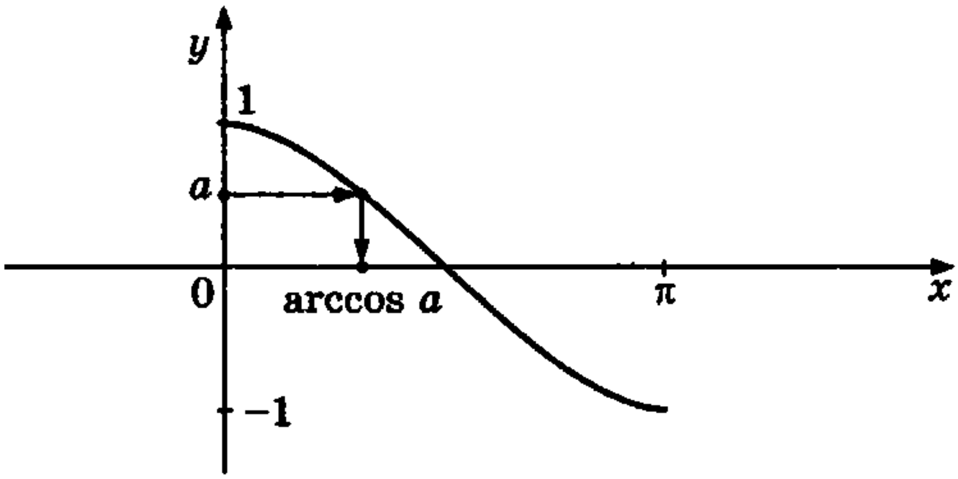


Рис. 1.18. Графическое определение arccos a

Этот рисунок можно рассматривать и как другую форму записи определения 4 (на графическом языке), а не как его иллюстрацию.

Еще одна возможность наглядной иллюстрации arccos a связана с определением cos x с помощью тригонометрической окружности. Напомним, что cos x — это абсцисса точки P_x на единичной окружности (P_x — образ точки $P_0 = (1;\ 0)$ при повороте на угол x вокруг начала координат), или, что то же самое, длина отрезка OC_x, где C_x — проекция точки P_x на ось абсцисс с учетом знака (рис. 1.19).

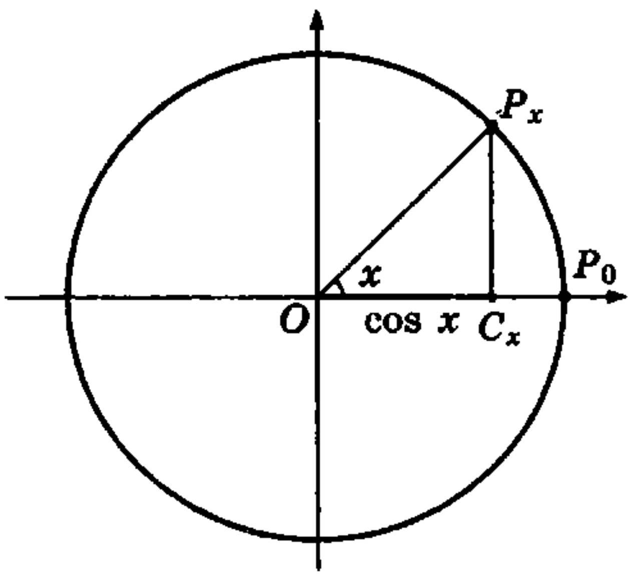


Рис. 1.19. Определение cos x
на тригонометрической окружности

Поэтому arccos *a* можно иллюстрировать (а на самом деле геометрически и определять) с помощью тригонометрической окружности следующим образом (рис. 1.20).

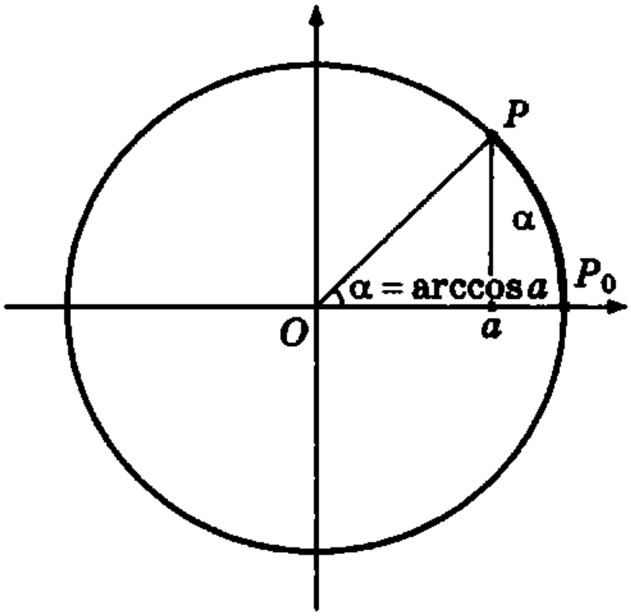


Рис. 1.20. Определение arccos *a* на тригонометрической окружности

Отметим на оси абсцисс точку *a* и проведем прямую параллельно оси ординат. Эта прямая пересечет верхнюю половину тригонометрической окружности в некоторой точке *P*.

Тогда arccos *a* — это величина угла POP_0, измеренного в радианах.

С равным успехом под arccos *a* можно понимать длину дуги P_0P.

Поскольку arccos *a* однозначно определен для любого $a \in [-1; 1]$, можно говорить о функции $y = \arccos x$, область определения которой — отрезок [−1; 1].

В силу основного определения 4 равенство $y = \arccos x$ равносильно системе

$$\begin{cases} x = \cos y, \\ 0 \le y \le \pi. \end{cases} \qquad (1.24)$$

Поэтому функция $y = \arccos x$ является обратной к сужению функции $y = \cos x$ на отрезок $[0; \pi]$. Соответственно, ее график получается из ветви графика функции $y = \cos x$, соответствующей $x \in [0; \pi]$, осевой симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 1.21).

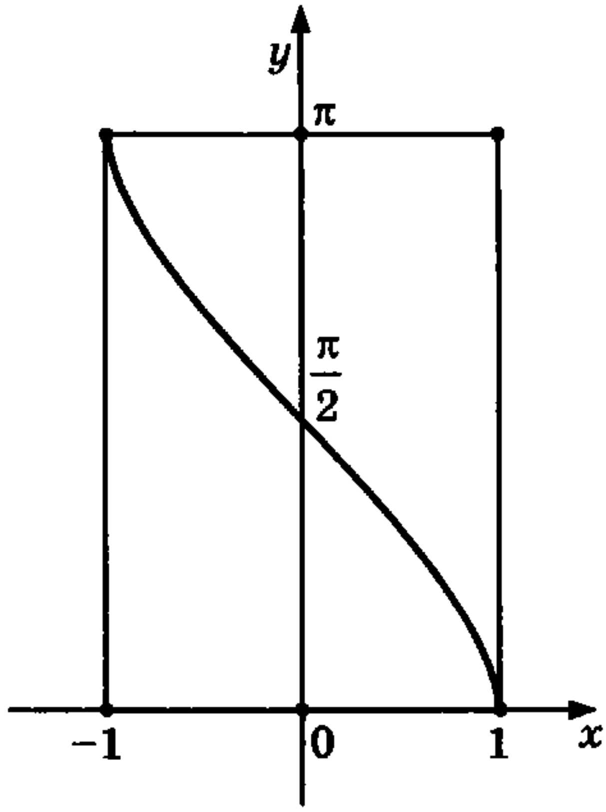


Рис. 1.21. График функции $y = \arccos x$

Однако часто удобнее представлять себе график функции $y = \arccos x$ по-другому, как центральную ветвь графика $y = \cos x$, которую повернули на 90° и отобразили симметрично относительно оси ординат. Этот же результат можно получить, если повернуть лист бумаги, на котором изображен график функции $y = \cos x$ так, чтобы ось y стала горизонтальной, а ось x — вертикальной, и посмотреть на рисунок с обратной стороны листа (тогда новая ось абсцисс будет направлена вправо).

При этом полезно помнить, что график функции $y = \arccos x$ расположен в прямоугольнике $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$ (этот прямоугольник изображен на рис. 1.21).

В зависимости от ситуации при решении задач, в которых фигурирует $\arccos x$, приходится использовать либо формально-алгебраическое определение 4, либо его графический вариант, представленный на рисунках 1.17, 1.18, либо геометрический вариант определения, представленный на рис. 1.19, либо график функции $y = \arccos x$, изображенный на рис. 1.21.

ГЛАВА 2. СВОЙСТВА ARC-ФУНКЦИЙ

2.1. Свойства типа четности/нечетности

Теорема 2.1.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\ a \in [-1;\ 1], \tag{2.1}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ a \in [-1;\ 1], \tag{2.2}$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a,\ a \in (-\infty;\ +\infty), \tag{2.3}$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a,\ a \in (-\infty;\ +\infty). \tag{2.4}$$

Решение задачи. В качестве основы для доказательства этих тождеств можно использовать:

1. формальное алгебраическое определение;
2. определение с помощью графика соответствующей прямой тригонометрической функции;
3. геометрическое определение с помощью тригонометрической окружности;
4. график соответствующей обратной тригонометрической функции.

Мы подробно рассмотрим тождество (2.2) и приведем четыре способа его доказательства; для остальных тождеств анализ будет практически дословно повторять приводимые ниже рассуждения.

1. В соответствии с алгебраическим определением доказать, что $\arccos(-a)$ равен $\pi - \arccos a$ — это значит доказать, что число $\alpha = \pi - \arccos a$ обладает двумя свойствами:

$$\cos\alpha = -a, \tag{2.5}$$

$$0 \le \alpha \le \pi, \tag{2.6}$$

которые однозначно характеризуют $\arccos(-a)$. При этом мы будем исходить из следующих свойств числа $\beta = \arccos a$:

$$\cos\beta = a, \tag{2.7}$$

$$0 \le \beta \le \pi. \tag{2.8}$$

Начнем с равенства (2.5):

$$\cos\alpha \equiv \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = -a.$$

Проделанные выкладки используют известное тождество $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$ и соотношение (2.7).

Далее, неравенство (2.6) равносильно неравенству $0 \le \pi - \beta \le \pi$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству (2.8).

2. Нарисуем фрагмент графика функции $y = \cos x$, соответствующий $x \in [0; \pi]$, и отметим на оси ординат точки a и $-a$ (рис. 2.1, где для определенности изображен случай $a > 0$).

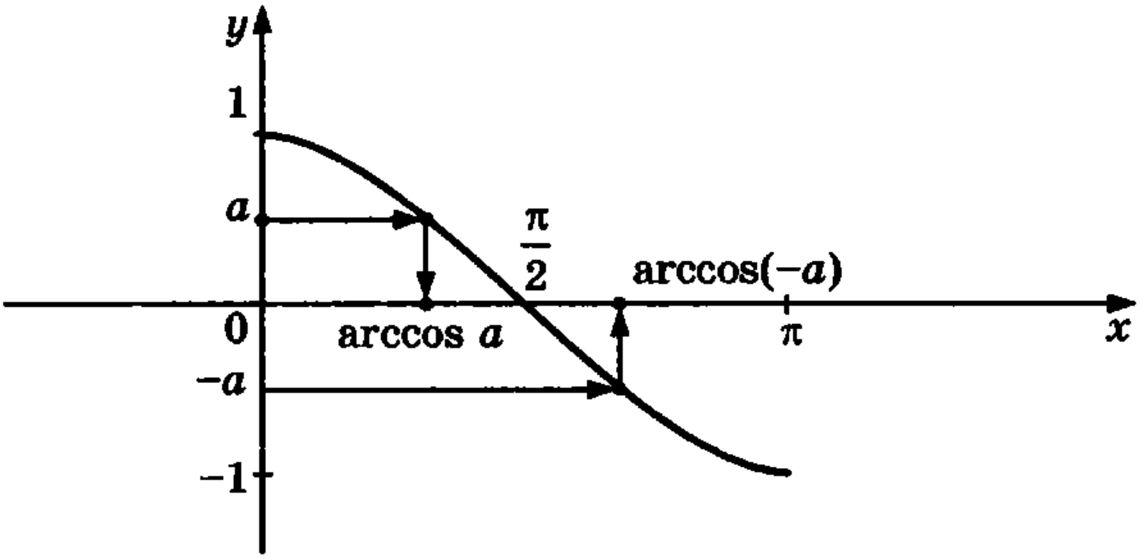


Рис. 2.1. Доказательство тождества $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ с помощью графика $y = \cos x$

Затем проведем горизонтальные прямые $y = a$ и $y = -a$ до пересечения с «центральной» ветвью косинусоиды.

Известное тригонометрическое тождество $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ на геометрическом языке означает, что точка $M\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ является центром симметрии графика функции $y = \cos x$. Из этой симметрии косинусоиды следует, что длина отрезка $\left[\arccos a;\frac{\pi}{2}\right]$ равна длине отрезка $\left[\frac{\pi}{2};\arccos(-a)\right]$, т.е. $\frac{\pi}{2}-\arccos a=$ $=\arccos(-a)-\frac{\pi}{2}$, откуда немедленно следует (2.2).

Случай $a < 0$ можно свести к случаю $a > 0$. Действительно, число $b = -a$ — положительно и потому в силу уже доказанного верно равенство

$$\arccos(-b)=\pi-\arccos b.$$

Заменяя здесь b на $-a$, мы получим (2.2).

Если $a = 0$, то $\arccos a=\arccos(-a)=\frac{\pi}{2}$, так что тождество (2.2) очевидно истинно.

3. Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на оси абсцисс точки a и $-a$ (рис. 2.2, где для определенности изображен случай $0 < a < 1$) и проведем вертикальные прямые до пересечения с верхней полуокружностью.

В соответствии с геометрическим определением $\arccos a = \angle P_0OP = \angle aOP$, $\arccos(-a)= \angle P_0OP' = \angle aOP'$ (здесь a и $(-a)$ обозначают соответствующие точки на оси абсцисс).

Рассмотрим треугольники aOP и $(-a)OP'$. Они — прямоугольные ($\angle PaO=\angle P'(-a)O=90°$), их гипотенузы равны 1, катеты Oa и $O(-a)$ имеют равные длины.

Поэтому эти треугольники равны. Следовательно, равны и углы POa и $P'O(-a)$, а тогда

$$\arccos(-a) = \angle aOP' = \pi - \angle P'O(-a) = \pi - \angle POa = \pi - \arccos a.$$

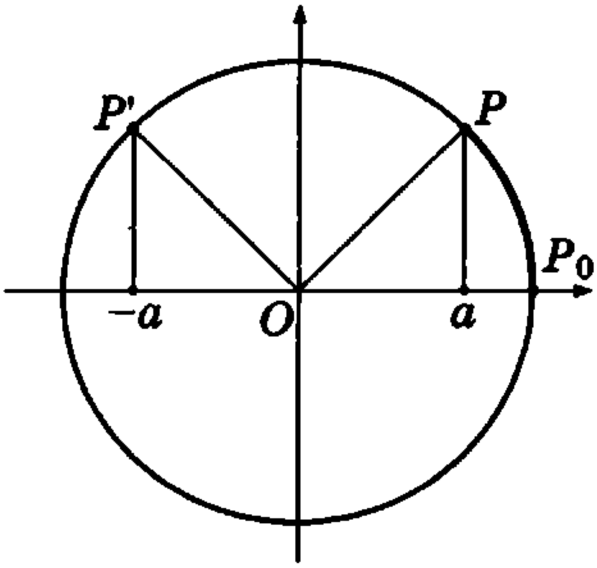


Рис. 2.2. Доказательство тождества $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ с помощью тригонометрической окружности

4. График функции $y = \arccos(-x)$ получается из графика функции $y = \arccos x$ осевой симметрией относительно оси ординат. Он изображен на рис. 2.3.

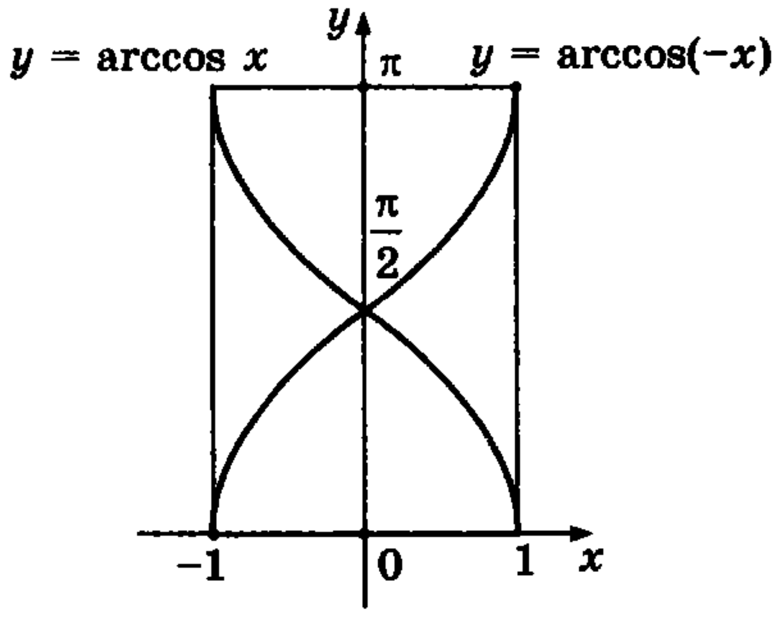


Рис. 2.3. График функции $y = \arccos(-x)$

График функции $y=\pi-\arccos x$ получается из графика функции $y = \arccos x$ последовательным выполнением двух движений (рис. 2.4):

1. осевой симметрией относительно оси абсцисс;
2. параллельным переносом на π вдоль оси ординат.

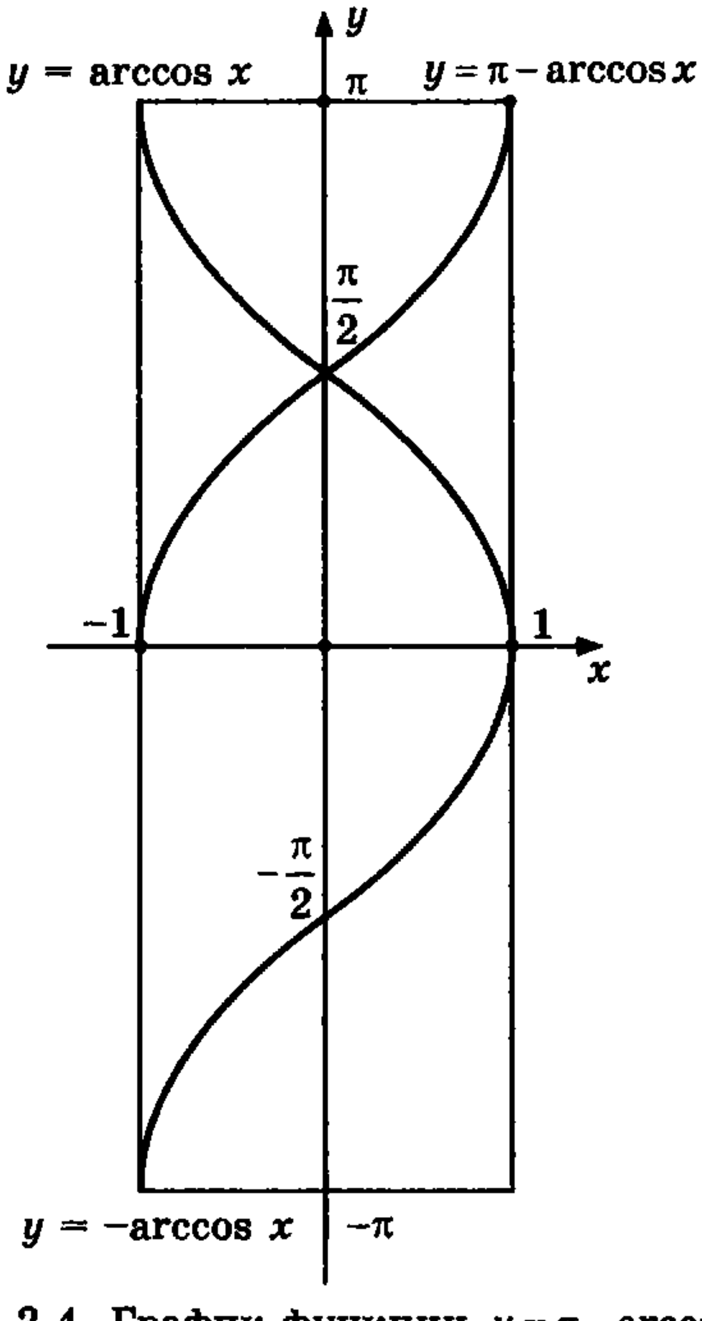


Рис. 2.4. График функции $y=\pi-\arccos x$

Из рисунков 2.3 и 2.4 ясно, что речь идет об одном и том же графике. Это означает справедливость тождества (2.2).

2.2. Связь arc-функций и arc-кофункций одного аргумента

Теорема 2.2.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1; 1], \qquad (2.9)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},\ x \in (-\infty; +\infty). \qquad (2.10)$$

Решение задачи. Как обычно, в качестве основы для доказательства этих тождеств можно использовать:

1. формальное алгебраическое определение;
2. определение с помощью графика соответствующей прямой тригонометрической функции;
3. геометрическое определение с помощью тригонометрической окружности;
4. график соответствующей обратной тригонометрической функции.

Мы подробно рассмотрим тождество (2.9) и приведем четыре способа его доказательства; для (2.10) рассуждения повторяются практически дословно.

1. Перепишем тождество (2.9) в виде

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

В соответствии с алгебраическим определением $\arcsin x$ это равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right) = x, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{2} - \arccos x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Используя тождество $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ и разрешая неравенство системы относительно arccos x, мы получим:

$$\begin{cases}\cos(\arccos x)=x,\\ 0\le \arccos x\le \pi.\end{cases}$$

Это в точности система условий, определяющих arccos x.

2. Нарисуем график функции $y = \sin x$ и отметим на оси ординат точку a.

Затем проведем горизонтальную прямую $y = a$ до пересечения с «центральной» ветвью синусоиды (рис. 2.5, где для определенности изображен случай $0 < a < 1$ и отмечены два корня уравнения $\sin x = a$: $x_0 \equiv \arcsin a$ и x_1).

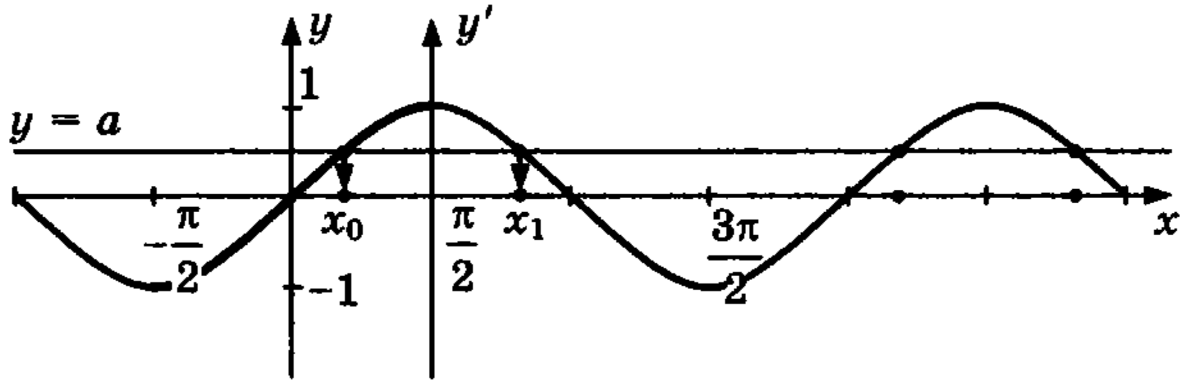


Рис. 2.5. Доказательство тождества $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$ с помощью графика $y = \sin x$

Если ось ординат сдвинуть вправо на $\frac{\pi}{2}$, то ветвь синусоиды, соответствующая $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, может рассматриваться как центральная ветвь косинусоиды. Точка x_1 в этой новой системе координат будет изображать число $x_1 - \frac{\pi}{2}$ (вычитаемое $\frac{\pi}{2}$ соответствует сдвигу оси ординат вправо на $\frac{\pi}{2}$). С другой стороны, в силу графического определения arccos a (см. рис. 1.18) эта точка изображает число arccos a, т.е.

$$x_1 - \frac{\pi}{2} = \arccos a.$$

Как мы видели в разделе 1.3, для корней x_0 и x_1 уравнения $\sin x = a$ верно равенство

$$x_1 = -x_0 + \pi \equiv -\arcsin a + \pi.$$

Иначе говоря,

$$-\arcsin a + \pi - \frac{\pi}{2} = \arccos a \Leftrightarrow \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

3. Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на осях абсцисс и ординат точки A и B так, что $OA = OB = a$ (рис. 2.6, где для определенности изображен случай $0 < a < 1$).

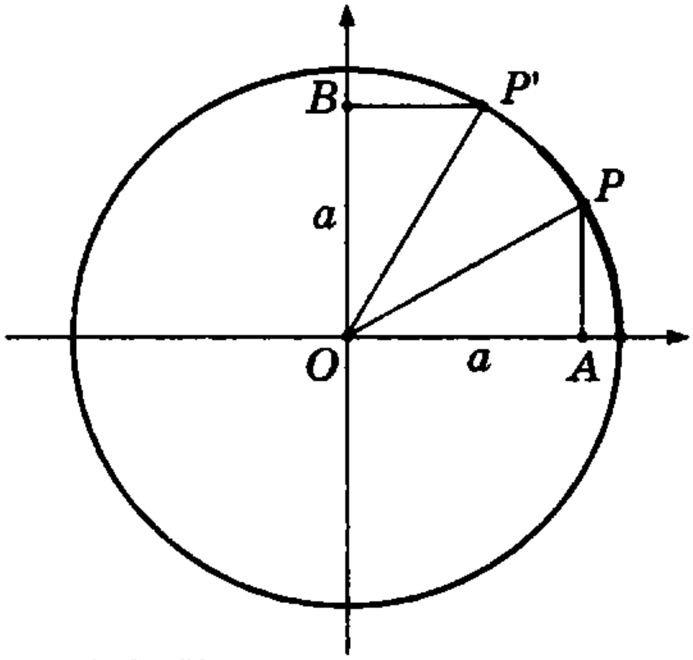


Рис. 2.6. Доказательство тождества $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ с помощью тригонометрической окружности для $0 < a < 1$

Проведем через точки A и B вертикальную и горизонтальную прямые соответственно до пересечения с правой верхней полуокружностью.

В соответствии с геометрическими определениями $\arcsin a = \angle P'OA$, $\arccos a = \angle POA$.

Рассмотрим треугольники OPA и $OP'B$. Они — прямоугольные ($\angle PAO = \angle P'BO = 90°$), их гипотенузы равны 1, катеты OA и OB имеют равные длины. Поэтому эти треугольники равны. Следовательно, равны и углы POA и $P'OB$. Но $\angle POA = \arccos a$, $\angle P'OB = $ $= \frac{\pi}{2} - \angle P'OA = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$, что означает справедливость доказываемого тождества в случае $0 < a < 1$.

Для $-1 < a < 0$ вместо рис. 2.6 нужно нарисовать рис. 2.7.

Рис. 2.7. Доказательство тождества $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ с помощью тригонометрической окружности для $-1 < a < 0$

Тогда $\arcsin a = -\angle P_0OP'$, $\arccos a = \angle P_0OP$. Из равенства треугольников OAP и OBP' следует равенство углов POA и $P'OB$. Но $\angle POA = \pi - \angle P_0OP = \pi - \arccos a$, $\angle P'OB = \frac{\pi}{2} - \angle P_0OP' = \frac{\pi}{2} + \arcsin a$, так что верно равенство $\pi - \arccos a = \frac{\pi}{2} + \arccos a$, которое равносильно доказываемому тождеству (2.9) в случае $-1 < a < 0$.

Случаи $a = 0$; -1; 1 проверяются непосредственно, т.к. мы можем подсчитать значения $\arcsin a$ и $\arccos a$.

4. Тождество $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ означает совпадение графиков функций $y = \arcsin x$ и $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

   График функции $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ получается из графика функции $y = \arccos x$ последовательным выполнением двух движений (рис. 2.8):

1. осевой симметрией относительно оси абсцисс;
2. параллельным переносом на $\frac{\pi}{2}$ вдоль оси ординат.

Из рис. 2.8 ясно, что в результате получится в точности график функции $y = \arcsin x$.

Тождество (2.9) позволяет из любого равенства, содержащего $\arcsin x$, получить аналогичное равенство, содержащее $\arccos x$. Например, свойство нечетности $\arcsin x$ превращается в тождество:

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(-x) = -\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right),$$

которое легко приводится к виду:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

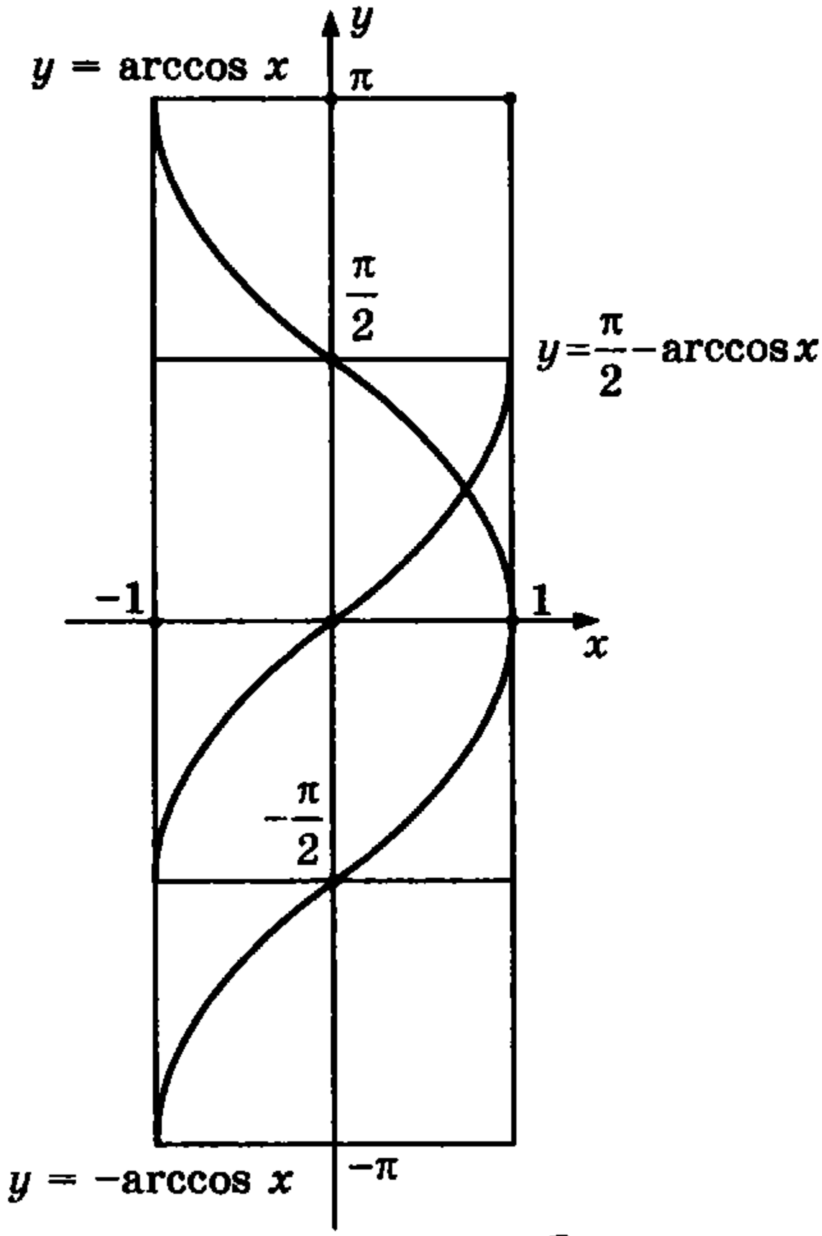


Рис. 2.8. График функции $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

2.3. Связь arc-функций и arc-кофункций разных аргументов

Рассмотрим угол $\alpha = \arcsin a$ для $a \in (0; 1)$, так что $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Как мы знаем, геометрически угол α

можно получить следующим образом (рис. 2.9): отметим на оси ординат точку a и проведем через нее прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с правой половиной тригонометрической окружности в некоторой точке P. Тогда $\alpha = \arcsin a$ — это величина угла POP_0, измеренного в радианах.

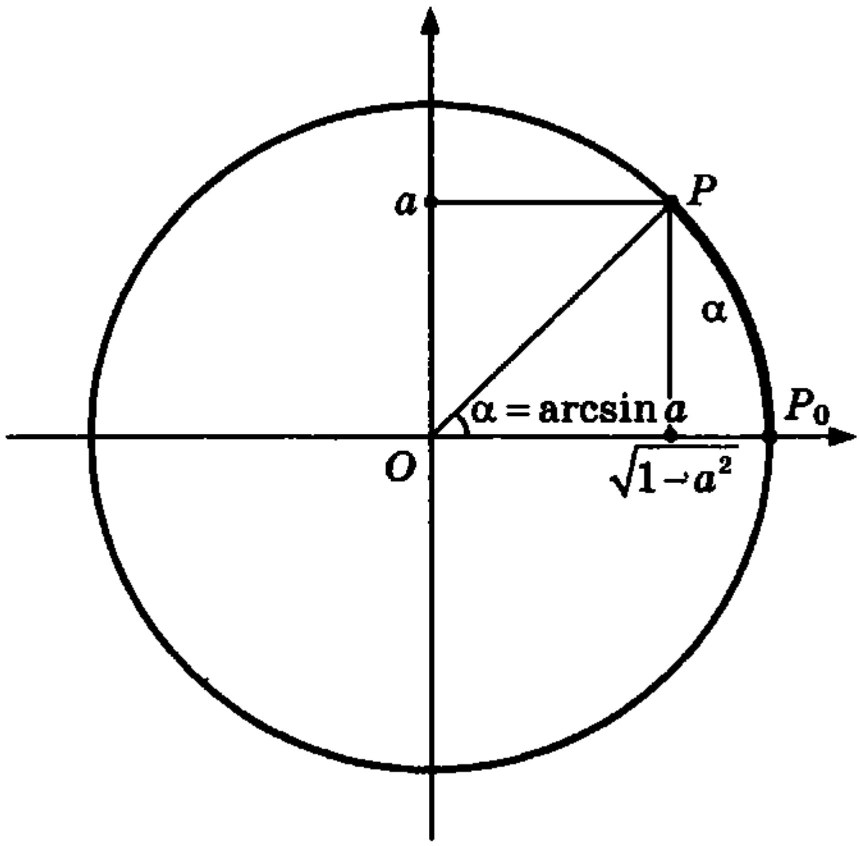


Рис. 2.9. Доказательство тождества $\arcsin a = \arccos\sqrt{1-a^2}$ для $0 < a < 1$ на тригонометрической окружности

Так как радиус окружности равен 1, абсцисса точки P равна $\sqrt{1-a^2}$. Тогда непосредственно по определению арккосинуса (см. рис. 1.20) можно утверждать, что $\alpha = \arccos\sqrt{1-a^2}$. Таким образом, для $\alpha \in (0; 1)$ верно равенство:

$$\arcsin a = \arccos\sqrt{1-a^2}. \qquad (2.11)$$

Кроме того, для этого же угла α верны равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Поскольку α — положительный острый угол, он лежит как на дуге $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (дуге арктангенсов), так и на дуге $\alpha \in (0; \pi)$ (дуге арккотангенсов). Следовательно, непосредственно по определению арктангенса и арккотангенса мы имеем:

$$\alpha \equiv \arcsin a = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \qquad (2.12)$$

$$\alpha \equiv \arcsin a = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}. \qquad (2.13)$$

Еще раз подчеркнем, что до сих пор мы предполагали, что $0 < a < 1$.

Общий случай, когда $-1 \le a \le 1$, описывается следующим утверждением.

Теорема 2.3.

$$\arcsin a = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-a^2}, \text{если } 0 \le a \le 1, \\ -\arccos\sqrt{1-a^2}, \text{если } -1 \le a \le 0, \end{cases}$$

$$\arcsin a = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \text{если } -1 < a < 1,$$

$$\arcsin a = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \text{если } 0 < a \le 1, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a} - \pi, \text{если } -1 \le a < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем первую формулу. Если $0 < a < 1$, то ее справедливость уже установлена. Если $a = 0$, то $\arcsin a = \arcsin 0 = 0$, $\arccos\sqrt{1-a^2} = \arccos 1 = 0$, так что формула верна. Если $a = 1$, то $\arcsin a = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\arccos\sqrt{1-a^2} = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$, так что формула верна. Если $-1 \le a \le 0$, то $a = -b$, где $b \in [0; 1]$, и тогда:

$$\arcsin a = \arcsin(-b) = -\arcsin b = -\arccos\sqrt{1-b^2} =$$

$$= -\arccos\sqrt{1-a^2}.$$

Теперь докажем вторую формулу. Если $0 < a < 1$, то ее справедливость уже установлена. Если $a = 0$, то $\arcsin a = \arcsin 0 = 0$, $\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \operatorname{arctg} 0 = 0$, так что формула верна. Если $-1 < a \le 0$, то $a = -b$, где $b \in [0; 1)$, и тогда:

$$\arcsin a = \arcsin(-b) = -\arcsin b = -\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{1-b^2}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{-b}{\sqrt{1-b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

И, наконец, для третьей формулы имеем: если $0 < a < 1$, то ее справедливость уже установлена. Если

$a = 1$, то $\arcsin a = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} = \operatorname{arcctg} 0 = $ $= \frac{\pi}{2}$, так что формула верна. Если $-1 \le a < 0$, то $a = -b$, где $b \in (0;1]$, и тогда:

$$\arcsin a = \arcsin(-b) = -\arcsin b = -\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-b^2}}{b} =$$

$$= -\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{-a} = -\left(\pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right) =$$

$$= \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} - \pi.$$

Теорема 2.4.

$$\arccos a = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-a^2}, \text{если } 0 \le a \le 1, \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-a^2}, \text{если } -1 \le a \le 0, \end{cases}$$

$$\arccos a = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \text{если } 0 < a \le 1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \text{если } -1 \le a < 0, \end{cases}$$

$$\arccos a = \operatorname{arcctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \text{если } -1 < a < 1.$$

Доказательство. Эту теорему можно доказать рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались при доказательстве теоремы 2.3. Но проще применить альтернативный метод, основанный на теореме 2.2. Например, первая формула получается следующим образом:

$$\arccos a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a = \frac{\pi}{2} - \begin{cases} \arccos\sqrt{1-a^2}, \text{если } 0 \le a \le 1, \\ -\arccos\sqrt{1-a^2}, \text{если } -1 \le a \le 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arccos\sqrt{1-a^2}, \text{если } 0 \le a \le 1, \\ \frac{\pi}{2} + \arccos\sqrt{1-a^2}, \text{если } -1 \le a \le 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-a^2}\right), \text{если } 0 \le a \le 1, \\ \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-a^2}\right), \text{если } -1 \le a \le 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-a^2}, \text{если } 0 \le a \le 1, \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-a^2}, \text{если } -1 \le a \le 0. \end{cases}$$

В качестве основы для доказательства вышеприведенных групп формул для арксинуса и арккосинуса с равным успехом может использоваться и метод, основанный на формальных алгебраических определениях. Мы продемонстрируем это на примере доказательства аналогичной группы формул для арктангенса.

Теорема 2.5.

$$\operatorname{arctg} a = \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, -\infty < a < +\infty,$$

$$\operatorname{arctg} a = \begin{cases} \arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \text{если } 0 \le a < +\infty, \\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \text{если } -\infty < a \le 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} a = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{a}, \text{если } 0 < a < +\infty, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{a} - \pi, \text{если } -\infty < a < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} a$. Это означает, что $\operatorname{tg}\alpha = a$ и $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Чтобы записать α как арксинус, арккосинус, арккотангенс (возможно, какого-то аргумента), прежде всего найдем значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Чтобы найти $\sin\alpha$, можно воспользоваться тождеством:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1 - \sin^2\alpha},$$

откуда

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a^2}{1 + a^2}.$$

Поскольку для $\alpha = \operatorname{arctg} a$ знак a совпадает со знаком $\sin\alpha$, последнее равенство равносильно равенству:

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Число α (как арктангенс) лежит на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Поэтому непосредственно в силу определения арксинуса можно утверждать, что $\alpha = \arcsin\dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$. Обратим внимание на то, что это равенство верно без каких бы то ни было ограничений на a.

Чтобы найти $\cos\alpha$, можно воспользоваться тождеством:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

откуда

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+a^2}.$$

Если $a\geq 0$, то $\alpha\equiv\operatorname{arctg}a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\cos\alpha>0$ и, следовательно, последнее равенство равносильно равенству:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Так как в рассматриваемом случае α лежит на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, непосредственно в силу определения арккосинуса можно утверждать, что $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

Если же $a\in(-\infty;0]$, то рассмотрим число $b=-a$. Оно уже будет неотрицательным и, следовательно, можно применять равенство $\operatorname{arctg}b=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$.

Тогда:

$$\operatorname{arctg}a=\operatorname{arctg}(-b)=-\operatorname{arctg}b=-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}=$$

$$=-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

И, наконец, найдем $\operatorname{ctg}\alpha$: если $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{a}$. Однако отсюда нельзя сделать вывод о том, что $\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{1}{a}$, так как для этого нужно дополнительно знать, что $\alpha \in (0; \pi)$. Мы же можем быть уверены только в том, что $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Однако, если дополнительно предположить, что $a \in (0; +\infty)$, то $\alpha \equiv \operatorname{arctg} a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. В этом случае непосредственно по определению арккотангенса мы имеем: $\alpha \equiv \operatorname{arcctg}\frac{1}{a}$.

Если же $a \in (-\infty; 0)$, то рассмотрим число $b = -a$. Оно уже будет положительным и, следовательно, можно применять равенство $\operatorname{arctg} b = \operatorname{arcctg}\frac{1}{b}$. Тогда:

$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b =$$
$$= -\operatorname{arcctg}\frac{1}{b} = -\operatorname{arcctg}\frac{1}{-a} =$$
$$= -\left(\pi - \operatorname{arcctg}\frac{1}{a}\right) = \operatorname{arcctg}\frac{1}{a} - \pi.$$

Теорема 2.6.

$$\operatorname{arcctg} a = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \text{если } 0 \le a < +\infty, & (2.14) \\ \pi - \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \text{если } -\infty < a \le 0, & (2.15) \end{cases}$$

$$\operatorname{arcctg} a = \arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, -\infty < a < +\infty, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{arcctg} a = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{a}, \text{если } 0 < a < +\infty, & (2.17) \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{a}, \text{если } -\infty < a < 0. & (2.18) \end{cases}$$

Доказательство. Эту теорему можно доказать рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались при доказательстве теоремы 2.5. Но проще применить альтернативный метод, основанный на теореме 2.2. Например, вторая формула получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg} a &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \\ &= \arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.4. Тождества для значений тригонометрических функций от arc-функций

2.4.1. Тождества для выражений вида $F(\operatorname{arc}F(x))$

Непосредственно из алгебраических определений обратных тригонометрических функций мы имеем:

$$\sin(\arcsin x) = x, \ -1 \le x \le 1, \tag{2.20}$$

$$\cos(\arccos x) = x, \ -1 \le x \le 1, \tag{2.21}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (2.22)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad -\infty < x < +\infty. \qquad (2.23)$$

При применении тождеств (2.20) и (2.21) необходимо иметь в виду следующее. Если в уравнении (неравенстве, системе) стоит выражение $\sin(\arcsin x)$ или $\cos(\arccos x)$, то его можно заменить на x. Однако это преобразование, вообще говоря, не является равносильным. Для равносильности необходимо сохранить ограничение $-1 \le x \le 1$, которое неявно содержится в самом факте написания $\arcsin x$ и $\arccos x$.

2.4.2. Тождества для выражений вида $F(\operatorname{arc}G(x))$

Более интересными являются следующие четыре группы тождеств:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1, \qquad (2.24)$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad (2.25)$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad (2.26)$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1, \qquad (2.27)$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad (2.28)$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad (2.29)$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \qquad (2.30)$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x \le 1,\ x \ne 0, \qquad (2.31)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0, \qquad (2.32)$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x \le 1,\ x \ne 0, \qquad (2.33)$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \qquad (2.34)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0. \qquad (2.35)$$

Эти и другие подобные тождества доказываются по единой методике. Поэтому мы докажем лишь несколько из приведенных выше тождеств.

Чтобы доказать тождество (2.24), рассмотрим выражение $\sin(\arccos x)$ как $\sin\alpha$, где про угол α мы знаем, что $\cos\alpha = x$ и $\alpha \in [0;\pi]$.

Поэтому, чтобы найти $\sin\alpha$, его нужно связать с $\cos\alpha$. Это можно сделать с помощью основного тригонометрического тождества: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, откуда

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}.$$

Далее, поскольку $\alpha \in [0;\pi]$, число $\sin\alpha$ — неотрицательно, так что знак модуля в последней формуле можно убрать и мы получим требуемый результат.

Рассуждения, которые приводят к тождеству (2.25), практически дословно повторяют доказательство тождества (2.24).

Выражение $\sin(\operatorname{arctg} x)$ можно рассматривать как $\sin\alpha$, где про угол α мы знаем, что $\operatorname{tg}\alpha = x$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому, чтобы найти $\sin\alpha$, его нужно связать с $\operatorname{tg}\alpha$. Это можно сделать с помощью тождества: $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Условие $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ позволяет гарантировать положительность $\cos\alpha$, так что знак модуля в последней формуле можно убрать (отметим, что тем самым мы фактически доказали тождество (2.28)).

Теперь для $\sin\alpha$ мы имеем:

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Тождества для тангенса и котангенса доказываются с помощью тождеств для синуса и косинуса. Например,

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2.36)$$

2.4.3. Тождества для выражений вида $F(2\operatorname{arc}G(x))$

Тождества, в которые входят удвоенные arc-функции, доказываются с помощью стандартных тригонометрических формул для двойных углов и ранее доказанных формул вида $F(\operatorname{arc}G(x))$.

Например,

$$\begin{aligned}\sin(2\arcsin x) &= \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) = \\ &= 2x\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le 1.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\sin(2\arccos x) &= \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2\sin(\arccos x)\cdot\cos(\arccos x) = \\ &= 2x\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le 1,\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\operatorname{arctg} x) &= \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2\sin(\operatorname{arctg} x)\cdot\cos(\operatorname{arctg} x) = \\ &= 2\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2},\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\operatorname{arcctg} x) &= \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2\sin(\operatorname{arcctg} x)\cdot\cos(\operatorname{arcctg} x) = \\ &= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Впрочем, последние два тождества легко доказать и независимо. Например, $\sin(2\operatorname{arctg} x)$ можно рассматривать как $\sin 2\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = x$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (на самом деле последнее условие нам не понадобится). Далее, преобразуем $\sin 2\alpha$ следующим образом:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

Если числитель и знаменатель последней дроби разделить на $\cos^2\alpha$, то мы получим формулу

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

откуда (с учетом того, что $\operatorname{tg}\alpha = x$) мы немедленно получаем тождество (2.39).

Аналогично доказываются следующие три группы тождеств.

$$\cos(2\arcsin x) = 1-2x^2, -1 \le x \le 1, \tag{2.41}$$

$$\cos(2\arccos x) = 2x^2-1, -1 \le x \le 1, \tag{2.42}$$

$$\cos(2\operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \tag{2.43}$$

$$\cos(2\operatorname{arcctg} x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}, \tag{2.44}$$

$$\operatorname{tg}(2\arcsin x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}, -1 \le x \le 1, x \ne \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{2.45}$$

$$\operatorname{tg}(2\arccos x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}, -1 \le x \le 1, x \ne \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{2.46}$$

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1-x^2}, x \ne \pm 1, \tag{2.47}$$

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arcctg} x) = \frac{2x}{x^2-1}, x \ne \pm 1, \tag{2.48}$$

$$\operatorname{ctg}(2\arcsin x) = \frac{1-2x^2}{2x\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1, x \ne 0, \tag{2.49}$$

$$\operatorname{ctg}(2\arccos x)=\frac{2x^2-1}{2x\sqrt{1-x^2}}, -1<x<1, x\neq 0, \qquad (2.50)$$

$$\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} x)=\frac{1-x^2}{2x}, x\neq 0, \qquad (2.51)$$

$$\operatorname{ctg}(2\operatorname{arcctg} x)=\frac{x^2-1}{2x}, x\neq 0. \qquad (2.52)$$

2.4.4. Многочлены Чебышева

По аналогии с доказательством тождества (2.42) для $\cos(2\arccos x)$ легко получить тождество для $\cos(3\arccos x)$. В качестве основы доказательства возьмем известное тригонометрическое тождество $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Заменяя в нем число α на $\arccos x$ и используя тождество (2.20), мы получим:

$$\cos(3\arccos x) = 4x^3 - 3x, \text{ если } -1 \leq x \leq 1. \qquad (2.53)$$

Естественно поставить вопрос о том, как можно упростить выражение $f_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, где n — произвольное натуральное число. Ответ на него дает

Теорема 2.7. *При любом* $n = 0;\ 1;\ 2\ldots$ *функция* $f_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ *совпадает (на отрезке* $-1 \leq x \leq 1$) *с определенным многочленом* $T_n(x)$.

Многочлены $T_n(x)$ *(они называются многочленами Чебышева) могут быть найдены с помощью рекуррентной формулы*

$$T_{n+1} = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.54)$$

и начальных условий:

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x. \qquad (2.55)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что рекуррентное соотношение (2.54) вместе с начальными условиями (2.55) позволяет последовательно однозначно определить функции $T_3(x)$, $T_4(x)$, ... При этом, поскольку $T_0(x)$ и $T_1(x)$ являются многочленами, многочленом будет и $T_2(x) = 2x \cdot T_1(x) - T_0(x)$ (впрочем, мы это уже знаем из (2.42)). Тогда многочленом будет и $T_3(x) = 2x \cdot T_2(x) - T_1(x)$ (впрочем, мы это уже знаем из (2.53)) и т.д.

В современной математике считается, что подобные рассуждения не являются в достаточной мере строгими. Чтобы удовлетворить современным стандартам математической строгости, будем использовать метод математической индукции. Это позволит аккуратно доказать не только то, что $T_n(x)$ — многочлен, но одновременно с этим и тождество $\cos(n \cdot \arccos x) = T_n(x)$.

Основание индукции. При $n = 0$; 1 справедливость утверждений теоремы вытекает из (2.20) и очевидного тождества $\cos(0 \cdot \arccos x) = 1$.

Шаг индукции. Допустим теперь, что утверждения теоремы истинны для функций

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_{n-1}(x),\ f_n(x).$$

Докажем их истинность для функции $f_{n+1} = \cos\left((n+1)\cdot\arccos x\right)$. Для этого нужно связать $f_{n+1}(x)$ с функциями $f_k(x)$, у которых индекс k не превосходит n, что, в свою очередь, сводится к получению формулы для $\cos\left((n+1)\alpha\right)$, в которую бы входили только функции $\cos(k\alpha)$ с коэффициентом k, не превосходящем n. Получить такую формулу можно следующим образом:

$$\cos\big((n+1)\alpha\big)=\cos(n\alpha+\alpha)=\cos(n\alpha)\cdot\cos\alpha-\sin(n\alpha)\ \sin\alpha=$$

$$=2\cos(n\alpha)\cdot\cos\alpha-\big(\cos(n\alpha)\cdot\cos\alpha+\sin(n\alpha)\cdot\sin\alpha\big)=$$

$$=2\cos(n\alpha)\cdot\cos\alpha-\cos\big((n-1)\alpha\big).$$

При $\alpha=\arccos x$ из этого тригонометрического тождества мы получим рекуррентное соотношение для функций $f_k(x)$:

$$f_{n+1}=2x\cdot f_n(x)-f_{n-1}(x).$$

В силу предположения индукции для $x\in[-1;1]$ верны равенства: $f_n(x)=T_n(x), f_{n-1}(x)=T_{n-1}(x)$. Поэтому

$$f_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x).$$

Используя (2.54), мы получим, что

$$f_{n+1}(x)=T_{n+1}(x).$$

Кроме того, если предположить, что многочленами являются функции $T_n(x)$ и $T_{n-1}(x)$, то рекуррентное соотношение (2.54) влечет, что многочленом будет и функция $T_{n+1}(x)$.

В качестве примера применения этой теоремы получим явные формулы для $T_2(x)$, $T_3(x)$ и $T_4(x)$; при $n=1$ и $n=2$ соотношение (2.54) дает (в согласии с (2.42) и (2.53)):

$$T_2(x)=2x\cdot T_1(x)-T_0(x)=2x\cdot x-1=2x^2-1,$$

$$T_3(x)=2x\cdot T_2(x)-T_1(x)=2x\cdot(2x^2-1)-x=4x^3-3x.$$

При $n = 3$ мы получим:

$$T_4(x) = 2x \cdot T_3(x) - T_2(x) = 2x \cdot (4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 =$$
$$= 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Для произвольного n получить выражение для многочлена $T_n(x)$ в стандартном виде

$$T_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n,1}x + a_{n,0}$$

относительно тяжело. Однако для решения разнообразных задач обычно достаточно знать лишь определенные свойства этих многочленов, установить которые относительно просто. Основные из них приведены в следующей теореме.

Теорема 2.8. *Все коэффициенты многочлена $T_n(x)$ являются целыми числами.*

Для $n \geq 1$ старший член многочлена $T_n(x)$ равен $2^{n-1}x^n$.

При четных n многочлен $T_n(x)$ содержит только четные степени x, а при нечетных — только нечетные.

Доказательство. Будем доказывать теорему методом математической индукции.

Основание индукции. При $n = 0$; 1; 2 справедливость утверждений теоремы вытекает из явных формул для $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.

Шаг индукции. Допустим теперь, что утверждения теоремы истинны для всех значений $0, 1, \ldots, n$. Докажем их истинность для многочлена с индексом $n + 1$. Используя рекуррентную формулу (2.54), мы имеем:

1. поскольку (по предположению индукции) все коэффициенты многочлена $T_n(x)$ — целые числа, все коэффициенты многочлена $2x \cdot T_n(x)$ также

являются целыми числами. Кроме того (по предположению индукции), и все коэффициенты многочлена $T_{n-1}(x)$ — целые числа. Поэтому разность $2x \cdot T_n(x)$ — $T_{n-1}(x)$, т.е. многочлен T_{n+1}, имеет только целые коэффициенты при степенях x;

2. поскольку (по предположению индукции) степень многочлена $T_n(x)$ равна n, многочлен $2x \cdot T_n(x)$ имеет степень $n + 1$. С другой стороны, степень многочлена $T_{n-1}(x)$ (по предположению индукции) равна $(n - 1)$. Поэтому разность $2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$, т.е. многочлен T_{n+1}, имеет степень $n + 1$;
3. если допустить, что старший член многочлена $T_n(x)$ равен $2^{n-1}x^n$, то старший член многочлена $T_{n+1}(x)$ равен $2x \cdot 2^{n-1}x^n = 2^n x^{n+1} = 2^{(n+1)-1}x^{n+1}$;
4. пусть $(n + 1)$ — нечетное число. Тогда n — четное, а $(n - 1)$ — нечетное. По предположению индукции многочлен $T_n(x)$ содержит только четные степени x. Соответственно, многочлен $2x \cdot T_n(x)$ содержит только нечетные степени x. Кроме того, так как $n - 1$ — нечетное число, по предположению индукции многочлен $T_{n-1}(x)$ содержит только нечетные степени x. Следовательно, и разность $2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$, т.е. многочлен T_{n+1}, содержит только нечетные степени x;
5. пусть $(n + 1)$ — четное число. Тогда n — нечетное, а $(n - 1)$ — четное. По предположению индукции многочлен $T_n(x)$ содержит только нечетные степени x. Соответственно, многочлен $2x \cdot T_n(x)$ содержит только четные степени x. Кроме того, так как $n - 1$ — четное число, по предположению индукции многочлен $T_{n-1}(x)$ содержит только четные степени x. Следовательно, и разность $2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$, т.е. многочлен T_{n+1}, содержит только четные степени x.

С помощью доказанной теоремы легко получить явную формулу для $T_n(x)$. Для этого найдем нули многочлена $T_n(x)$ на отрезке $[-1; 1]$. Поскольку на этом отрезке $T_n(x)$ совпадает с функцией $f_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, мы имеем:

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \cdot \arccos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение

$$\arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n},\ k \in \mathbb{Z} \qquad (2.56)$$

на самом деле является бесконечной совокупностью уравнений вида $\arccos x = y$; параметр $k \in \mathbb{Z}$ является своеобразным «номером» уравнения из этой совокупности. Уравнение $\arccos x = y$ либо не имеет корней (если $y \notin [0; \pi]$), либо имеет единственный корень $t = \cos y$ (если $y \in [0; \pi]$). Число вида $y_k = \frac{\pi(2k+1)}{2n}$, $k \in \mathbb{Z}$, лежит на отрезке $[0; \pi]$ только для $k = 0; 1; \ldots; n-1$. При этом $0 < y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < \pi$. Поэтому бесконечная совокупность уравнений (2.56) равносильна n уравнениям (с «номерами» $k = 0; 1; \ldots; n-1$):

$$\arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n},\ k = 0; 1; \ldots;\ n-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},\ k = 0; 1; \ldots;\ n-1.$$

При этом

$$1 > \cos\frac{\pi}{2n} > \cos\frac{3\pi}{2n} > \cos\frac{5\pi}{2n} > \ldots > \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} > -1. \quad (2.57)$$

Таким образом, многочлен $T_n(x)$ имеет ровно n различных нулей (2.57) на интервале $(-1; 1)$. Поскольку степень этого многочлена равна n, других нулей он не имеет. Кроме того, мы знаем, что его старший коэффициент равен 2^{n-1}. Поэтому

$$T_n(x) = 2^{n-1} \cdot \left(x - \cos\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \left(x - \cos\frac{3\pi}{2n}\right) \cdots \\ \cdots \left(x - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right). \tag{2.58}$$

Значение многочленов Чебышева в математике во многом связано со следующей теоремой, которая играет важную роль в вычислительной математике при решении задачи построения оптимальных интерполяционных и аппроксимационных формул.

Теорема 2.9. *Пусть $P_n(t)$ — произвольный многочлен степени $n \geq 1$ со старшим коэффициентом a_n и $[a; b]$ — некоторый отрезок числовой оси. Тогда*

$$\max_{t \in [a; b]} |P_n(t)| \geq 2|a_n| \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^n. \tag{2.59}$$

Это неравенство нельзя уточнить в том смысле, что знак равенства достигается для следующего многочлена степени n со старшим коэффициентом a_n.

$$P_n^*(t) = \frac{a_n \cdot (b-a)^n}{2^{2n-1}} \cdot T_n\left(\frac{2t-b-a}{b-a}\right). \tag{2.60}$$

Доказательство. Допустим противное, что

$$\max_{t \in [a, b]} |P_n(t)| < 2|a_n| \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Тогда, тем более, при всех $t \in [a; b]$ верно неравенство

$$|P_n(t)| < 2|a_n| \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^n \Leftrightarrow \left|\frac{2^{2n-1}}{a_n \cdot (b-a)^n} P_n(t)\right| < 1. \quad (2.61)$$

Рассмотрим функцию

$$Q_n(x) = \frac{2^{2n-1}}{a_n \cdot (b-a)^n} \cdot P_n\left(\frac{(b-a)x+b+a}{2}\right).$$

Если $x \in [-1; 1]$, то линейная функция $t(x) = \dfrac{(b-a)x+b+a}{2}$ монотонно возрастает от $t(-1) = a$ до $t(1) = b$. Поэтому в силу (2.61) при всех $x \in [-1; 1]$ верно неравенство

$$|Q_n(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < Q_n(x) < 1. \quad (2.62)$$

Кроме того, поскольку $P_n(t)$ — многочлен степени n со старшим членом $a_n t^n$, функция $Q_n(x)$ является многочленом степени n со старшим членом

$$\frac{2^{2n-1}}{a_n \cdot (b-a)^n} \cdot a_n \cdot \left(\frac{(b-a)x}{2}\right)^n = 2^{n-1} x^n,$$

т.е. таким же, как и старший член многочлена Чебышева $T_n(x)$. Поэтому разность $R_n(x) \equiv T_n(x) - Q_n(x)$ будет многочленом степени не выше, чем $(n-1)$. Это влечет, в частности, что число нулей многочлена $R_n(x)$ не может быть больше, чем $(n-1)$.

Рассмотрим на отрезке $[0; \pi]$ точки

$$\alpha_0 = 0;\ \alpha_1 = \frac{\pi}{n};\ \alpha_2 = \frac{2\pi}{n};\ \ldots;\ \alpha_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n};\ \alpha_n = \frac{n\pi}{n} = \pi.$$

Тогда числа $x_k = \cos\alpha_k$ расположены на отрезке $[-1; 1]$ и, кроме того,

$$x_0 = 1 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = -1.$$

Так как $\alpha_k \in [0; \pi]$, верно равенство $\arccos x_k = \alpha_k$. Поэтому значение многочлена Чебышева $T_n(x)$ при $x = x_k$ равно

$$T_n(x_k) = \cos(n \cdot \arccos x_k) = \cos(n \cdot \alpha_k) = \cos\left(n \cdot \frac{k\pi}{n}\right) =$$
$$= \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Соответственно, значение многочлена $R_n(x)$ в точке x_k равно

$$R_n(x_k) = T_n(x_k) - Q_n(x_k) = (-1)^k - Q_n(x_k).$$

Используя двойное неравенство (2.62), мы получим:

$$(-1)^k - 1 < R_n(x_k) < (-1)^k + 1.$$

При четных k это неравенство даст: $0 < R_n(x_k) < 2$, что влечет положительность $R_n(x_k)$. При нечетных $к$ это неравенство даст: $-2 < R_n(x_k) < 0$, что влечет отрицательность $R_n(x_k)$.

Поскольку на концах каждого из n отрезков

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ \ldots, \ [x_{n-1}; x_n]$$

многочлен принимает значения разных знаков, внутри каждого из этих отрезков найдется точка, где многочлен $R_n(x)$ равен нулю. Таким образом, многочлен $R_n(x)$ имеет по меньшей мере n нулей. Однако, как мы установили раньше, число нулей многочлена $R_n(x)$

не может быть больше, чем $(n - 1)$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Докажем теперь, что для многочлена $P_n^*(t)$, который задается формулой (2.60), неравенство (2.59) превращается в точное равенство.

Прежде всего отметим, что, поскольку $T_n(t)$ — многочлен степени n со старшим членом $2^{n-1}t^n$, функция $P_n^*(t)$ является многочленом степени n со старшим членом

$$\frac{a_n \cdot (b-a)^n}{2^{2n-1}} \cdot 2^{n-1} \cdot \left(\frac{2t}{b-a}\right)^n = a_n t^n.$$

Если $t \in [a; b]$, то линейная функция $x(t) = \dfrac{2t-b-a}{b-a}$ монотонно возрастает от $x(a) = -1$ до $x(b) = 1$. Поэтому при всех $t \in [a; b]$ верно равенство

$$P_n^*(t) = \frac{a_n \cdot (b-a)^n}{2^{2n-1}} \cdot \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{2t-b-a}{b-a}\right)\right).$$

Поскольку $|\cos u| \le 1$, можно утверждать, что

$$|P_n^*(t)| \le \frac{|a_n| \cdot (b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

Кроме того, если $t = b$, то

$$|P_n^*(t)| = \frac{|a_n| \cdot (b-a)^n}{2^{2n-1}} \cdot \left|\cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{2b-b-a}{b-a}\right)\right)\right| =$$

$$= \frac{|a_n| \cdot (b-a)^n}{2^{2n-1}} \cdot |\cos(n \cdot \arccos 1)| =$$

$$= \frac{|a_n| \cdot (b-a)^n}{2^{2n-1}} \cdot |\cos 0| = \frac{|a_n| \cdot (b-a)^n}{2^{2n-1}},$$

так что

$$\max_{t\in[a;b]}\left|P_n^*(t)\right| = 2\left|a_n\right|\cdot\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Число $\max\limits_{t\in[a;b]}\left|P_n(t)\right|$ называется *уклонением* многочлена $P_n(t)$ от нуля на отрезке $[a;\ b]$. Поэтому доказанная теорема фактически утверждает, что трансформированный многочлен Чебышева $P_n^*(t)$ является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом a_n.

2.4.5. Тождества для выражений вида $F\left(\frac{1}{2}\mathrm{arc}G(x)\right)$

Доказательство тождеств с половинными arc-функциями требует проведения рассуждений, аналогичных тем, которые мы проводили в разделе 2.4.2.

Самыми простыми из них являются следующие четыре тождества:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1-x}{2}},\ -1\le x\le 1, \tag{2.63}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{2}},\ -1\le x\le 1, \tag{2.64}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ -1< x\le 1, \tag{2.65}$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ -1\le x< 1. \tag{2.66}$$

Чтобы доказать тождество (2.63), рассмотрим выражение $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$ как $\sin\frac{\alpha}{2}$, где про угол α мы знаем, что $\cos\alpha = x$ и $\alpha \in [0; \pi]$.

Поэтому, чтобы найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, его нужно связать с $\cos\alpha$. Это можно сделать с помощью известного тригонометрического тождества: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, откуда

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

Далее, поскольку $\alpha \in [0; \pi]$, число $\frac{\alpha}{2}$ лежит на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, где синус является неотрицательным, так что знак модуля в последней формуле можно убрать и мы получим требуемый результат.

Рассуждения, которые приводят к тождеству (2.64), практически дословно повторяют только что проведенное доказательство.

Тождества (2.65) и (2.66) получаются почленным делением тождеств (2.63) и (2.64).

Немного сложнее доказываются тождества

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}, -1 \le x \le 1, \quad (2.67)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}, -1 \le x \le 1, \quad (2.68)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}, -1 \le x \le 1, \quad (2.69)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},\ -1\le x\le 1,\ x\ne 0. \quad (2.70)$$

Самый простой способ их доказательства связан с замсной $\arcsin x$ выражением $\frac{\pi}{2}-\arccos x$.

Для тождества (2.67) мы имеем:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos x\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}-\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}.$$

Для тождества (2.68) рассуждения аналогичны:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos x\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}+\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}.$$

Тождества (2.69) и (2.70) получаются из тождеств (2.67) и (2.68) почленным делением.

Если $x\ne 0$, то правую часть тождества (2.69) можно привести к виду $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, а правую часть тождества (2.70) — к виду $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. Для этого достаточно обычным способом избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Следующая группа тождеств включает $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)=\frac{x}{\sqrt{2\left(1+x^2+\sqrt{1+x^2}\right)}}, \qquad (2.71)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)=\frac{\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}, \qquad (2.72)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}, \qquad (2.73)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x},\quad x\neq 0. \qquad (2.74)$$

Проще всего доказать тождество (2.73). Для этого обозначим $\operatorname{arctg} x$ через α. Тогда:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\equiv\frac{\sin\operatorname{arctg} x}{1+\cos\operatorname{arctg} x}.$$

Используя уже доказанные формулы (2.25) и (2.28), мы получим:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

Чтобы доказать тождество (2.71), перепишем его в виде

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{\sqrt{2\left(1+x^2+\sqrt{1+x^2}\right)}},$$

где, как и раньше, $\alpha=\operatorname{arctg}x$, так что $\operatorname{tg}\alpha=x$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Последнее условие гарантирует, что $-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$ и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2}>0$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2}=\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Понижая степень за счет удвоения аргумента, мы получим: $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. Но $\cos\alpha$ — это cos arctg x, для которого уже доказано тождество (2.28). Поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}=\frac{\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}.$$

Поскольку $\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, доказанные тождества (2.73) и (2.72) влекут (2.71) и (2.74).

Практически дословное повторение рассуждений, которые привели к тождествам (2.71)–(2.74), позволяет доказать аналогичные им тождества, в которые входит не $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$, а $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}x$:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{2\sqrt{1+x^2}}}, \qquad (2.75)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2\sqrt{1+x^2}}}, \qquad (2.76)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x\right)=\sqrt{1+x^2}-x, \qquad (2.77)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x\right)=\sqrt{1+x^2}+x. \qquad (2.78)$$

2.5. Тождества для выражений вида $2\operatorname{arc}F(x)$

Теорема 2.10.

$$2\arcsin x=\begin{cases}\arccos(1-2x^2), \text{ если } x\in[0;1], & (2.79)\\ -\arccos(1-2x^2), \text{ если } x\in[-1;0], & (2.80)\end{cases}$$

$$2\arccos x=\begin{cases}\arccos(2x^2-1), \text{ если } x\in[0;1], & (2.81)\\ 2\pi-\arccos(2x^2-1), \text{ если } x\in[-1;0], & (2.82)\end{cases}$$

$$2\operatorname{arctg} x=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x^2}{2x}, \text{ если } 0<x<+\infty, & (2.83)\\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1-x^2}{2x}-\pi, \text{ если } -\infty<x<0, & (2.84)\end{cases}$$

$$2\operatorname{arcctg} x=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2-1}{2x}, \text{ если } 0<x<+\infty,\\ \operatorname{arcctg}\dfrac{x^2-1}{2x}+\pi, \text{ если } -\infty<x<0.\end{cases} \qquad (2.85)$$

Доказательство. Рассмотрим тождество (2.41):

$$\cos(2\arcsin x) = 1 - 2x^2,$$

которое верно для всех $x \in [-1; 1]$. В этой ситуации относительно $\alpha = \arcsin x$ можно утверждать лишь то, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому 2arcsin x лежит где-то на отрезке $[-\pi; \pi]$, так что из тождества (2.41) нельзя сделать вывод о том, что $2\arcsin x = \arccos(1 - 2x^2)$. Но если предположить, что $x \in [0; 1]$, то $\alpha = \arcsin x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому 2arcsin x лежит где-то на отрезке $[0; \pi]$, так что непосредственно по определению арккосинуса мы имеем:

$$2\arcsin x = \arccos(1 - 2x^2).$$

Если $x \in [-1; 0]$, то $y = -x \in [0; 1]$ и потому

$$2\arcsin x = 2\arcsin(-y) = -2\arcsin y = -\arccos(-1 - 2y^2) =$$
$$= -\arccos(1 - 2x^2).$$

Формула для 2arccos x получается на основе доказанной формулы для 2arcsin x:

$$2\arccos x = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \pi - 2\arcsin x =$$

$$= \pi - \begin{cases} \arccos(1 - 2x^2), \text{ если } x \in [0; 1], \\ -\arccos(1 - 2x^2), \text{ если } x \in [-1; 0], \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi - \arccos(1 - 2x^2), \text{ если } x \in [0; 1], \\ \pi + \arccos(1 - 2x^2), \text{ если } x \in [-1; 0], \end{cases}$$

$$=\begin{cases}\arccos(2x^2-1), \text{если } x\in[0;1],\\ 2\pi-\arccos(2x^2-1), \text{если } x\in[-1;0].\end{cases}$$

Чтобы получить тождество для 2arctg x, рассмотрим тождество (2.51):

$$\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg}x)=\frac{1-x^2}{2x},$$

которое верно для всех $x\neq 0$. В этой ситуации относительно $\alpha=\operatorname{arctg}x$ можно утверждать лишь то, что $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому число 2arctg x лежит где-то на интервале $(-\pi;\pi)$, так что из тождества (2.51) нельзя сделать вывод о том, что $2\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{2x}$. Но если предположить, что $x\in(0;+\infty)$, то $\alpha\equiv\operatorname{arctg}x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому число 2arctg x лежит где-то на интервале $(0;\pi)$, так что непосредственно по определению арккотангенса мы имеем:

$$2\operatorname{arctg}x=\operatorname{arcctg}\frac{1-x^2}{2x}.$$

Если $x\in(-\infty;0)$, то $y=-x\in(0;+\infty)$ и потому

$$2\operatorname{arctg}x=2\operatorname{arctg}(-y)=-\operatorname{arcctg}\frac{1-y^2}{2y}=$$

$$=-\operatorname{arcctg}\frac{1-x^2}{-2x}=$$

$$=-\left(\pi-\operatorname{arcctg}\frac{1-x^2}{2x}\right)=\operatorname{arcctg}\frac{1-x^2}{2x}-\pi.$$

Формула для 2arcctg x получается на основе доказанной формулы для $2\operatorname{arctg} x$:

$$2\operatorname{arcctg} x = 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \pi - 2\operatorname{arctg} x$$

$$= \pi - \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1-x^2}{2x}, \text{если } 0 < x < +\infty, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1-x^2}{2x} - \pi, \text{если } -\infty < x < 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi - \operatorname{arcctg}\dfrac{1-x^2}{2x}, \text{если } 0 < x < +\infty, \\ \pi - \left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x^2}{2x} - \pi\right), \text{если } -\infty < x < 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{x^2-1}{2x}, \text{если } 0 < x < +\infty, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{x^2-1}{2x} + \pi, \text{если } -\infty < x < 0. \end{cases}$$

2.6. Тождества для выражений вида $\frac{1}{2}\operatorname{arc}F(x)$

Теорема 2.11.

$$\frac{1}{2}\arcsin x = \arcsin\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}, x \in [-1; 1], \qquad (2.86)$$

$$\frac{1}{2}\arccos x = \arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}, x \in [-1; 1], \qquad (2.87)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}},\ x\in(-\infty;+\infty), \qquad (2.88)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right),\ x\in(-\infty;+\infty). \qquad (2.89)$$

Доказательство. Рассмотрим тождество (2.67):

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2},$$

которое верно для всех $x\in[-1;1]$. В этой ситуации относительно $\alpha=\arcsin x$ можно утверждать, что $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $\frac{1}{2}\arcsin x$ лежит где-то на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, так что непосредственно по определению арксинуса мы имеем:

$$\frac{1}{2}\arcsin x=\arcsin\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}.$$

Формула для $\frac{1}{2}\arccos x$ получается подобным же образом на основе формулы (2.64):

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Поскольку $\arccos x\in[0;\pi]$, можно гарантировать, что $\frac{1}{2}\arccos x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, а тогда непосредственно по определению арккосинуса мы имеем: $\frac{1}{2}\arccos x =$ $= \arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

Формулы для $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ и $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x$ получаются подобным же образом на основе формул (2.73) и (2.78) соответственно.

2.7. Тождества для выражений вида arc$F(x)$±arc$F(y)$

Теорема 2.12. *Если* $x,\ y \in [0;1]$, *то*

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right), \quad (2.90)$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \quad (2.91)$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \quad (2.92)$$

$$\arccos x - \arccos y = \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right). \quad (2.93)$$

Если $x,\ y \in (0;+\infty)$, *то*

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}, \quad (2.94)$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}, \quad (2.95)$$

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}, \quad (2.96)$$

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{y-x}{1+xy}. \qquad (2.97)$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin y$, где $x, y \in [0;1]$. В этой ситуации можно утверждать, что $\alpha, \beta \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому число $\alpha+\beta$ лежит где-то на отрезке $[0;\pi]$, так что равенство $\cos(\alpha+\beta)=a$ равносильно равенству $\alpha+\beta=\arccos a$. Имея это в виду, подсчитаем $\cos(\alpha+\beta)$:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta\equiv$$
$$\equiv\cos(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin y)-$$
$$-\sin(\arcsin x)\cdot\sin(\arcsin y).$$

Используя тождества (2.19) и (2.27), мы получим:

$$\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy,$$

что (с учетом установленного неравенства $0\le\alpha+\beta\le\pi$) означает справедливость тождества (2.90).

Для числа $\alpha-\beta$ неравенства $0\le\alpha,\beta\le\frac{\pi}{2}$ означают справедливость двойного неравенства $-\frac{\pi}{2}\le\alpha-\beta\le\frac{\pi}{2}$. В этой ситуации равенство $\sin(\alpha-\beta)=a$ равносильно равенству $\alpha-\beta=\arcsin a$. Имея это в виду, подсчитаем $\sin(\alpha-\beta)$:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta\equiv$$

$$\equiv\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin y)-\cos(\arcsin x)\cdot\sin(\arcsin y).$$

Используя тождества (2.19) и (2.27), мы получим:

$$\sin(\alpha-\beta)=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2},$$

что (с учетом установленного неравенства $-\frac{\pi}{2}\le\alpha-\beta\le\frac{\pi}{2}$) означает справедливость тождества (2.91).

Пусть $\alpha=\arccos x$, $\beta=\arccos y$, где x, $y\in[0;\,1]$. В этой ситуации можно утверждать, что $\alpha,\beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому число $\alpha+\beta$ лежит где-то на отрезке $[0;\pi]$, так что равенство $\cos(\alpha+\beta)=a$ равносильно равенству $\alpha+\beta=\arccos a$.

Имея это в виду, подсчитаем $\cos(\alpha+\beta)$:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=$$

$$=\cos(\arccos x)\cdot\cos(\arccos y)-\sin(\arccos x)\cdot\sin(\arccos y).$$

Используя тождества (2.20) и (2.24), мы получим:

$$\cos(\alpha+\beta)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

что (с учетом установленного неравенства $0\le\alpha+\beta\le\pi$) означает справедливость тождества (2.92).

Для числа $\alpha-\beta$ неравенства $0\le\alpha,\beta\le\frac{\pi}{2}$ означают справедливость двойного неравенства $-\frac{\pi}{2}\le\alpha-\beta\le\frac{\pi}{2}$. В этой ситуации равенство $\sin(\alpha-\beta)=a$ равносильно равенству $\alpha-\beta=\arcsin a$. Имея это в виду, подсчитаем $\sin(\alpha-\beta)$:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta =$$

$$= \sin(\arccos x) \cdot \cos(\arccos y) - \cos(\arccos x) \cdot \sin(\arccos y).$$

Используя тождества (2.20) и (2.24), мы получим:

$$\sin(\alpha - \beta) = y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2},$$

что (с учетом установленного неравенства $-\frac{\pi}{2} \le \alpha - \beta \le \frac{\pi}{2}$) означает справедливость тождества (2.93).

Замечание. Для упрощения формулировки теоремы мы ограничились рассмотрением случаев, которые представляют наибольший интерес. Другие варианты сводятся к уже рассмотренным. Например, если $x \in [0;1]$, $y \in [-1;0]$, то $u = -y \in [0;1]$, так что:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin x + \arcsin(-u) =$$
$$= \arcsin x - \arcsin u =$$
$$= \arcsin\left(x\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-x^2}\right) =$$
$$= \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Теперь займемся тождествами для арктангенса и арккотангенса.

Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} y$, где x, $y \in (0; +\infty)$. В этой ситуации можно утверждать, что $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому число $\alpha + \beta$ лежит где-то на интервале $(0; \pi)$, так что равенство $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = a$ равносильно равенству $\alpha + \beta = \operatorname{arcctg} a$. Имея это в виду, подсчитаем $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)\cdot\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}y)-1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)+\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}y)}.$$

Используя тождество (2.35), мы получим:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{1-xy}{x+y},$$

что (с учетом установленного неравенства $0<\alpha+\beta<\pi$) означает справедливость тождества (2.94).

Для числа $\alpha-\beta$ неравенства $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ означают справедливость двойного неравенства $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$. В этой ситуации равенство $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=a$ равносильно равенству $\alpha-\beta=\operatorname{arctg}a$. Имея это в виду, подсчитаем $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}y)}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}y)}.$$

Используя тождество (2.21), мы получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{1+xy},$$

что (с учетом установленного неравенства $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$) означает справедливость тождества (2.95).

Пусть $\alpha = \operatorname{arcctg} x$, $\beta = \operatorname{arcctg} y$, где $x,\ y \in (0; +\infty)$. В этой ситуации можно утверждать, что $\alpha,\ \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому число $\alpha + \beta$ лежит где-то на интервале $(0; \pi)$, так что равенство $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = a$ равносильно равенству $\alpha + \beta = \operatorname{arctg} a$. Имея это в виду, подсчитаем $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) \cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y) - 1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y)}.$$

Используя тождество (2.22), мы получим:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{xy - 1}{x + y},$$

что (с учетом установленного неравенства $0 < \alpha + \beta < \pi$) означает справедливость тождества (2.96).

Для числа $\alpha - \beta$ неравенства $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ означают справедливость двойного неравенства $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$. В этой ситуации равенство $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = a$ равносильно равенству $\alpha - \beta = \operatorname{arcctg} a$. Имея это в виду, подсчитаем $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) - \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} y)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} y)}.$$

Используя тождество (2.32), мы получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{y-x}{1+xy},$$

что (с учетом установленного неравенства $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$) означает справедливость тождества (2.97).

2.8. Тождества для выражений вида arcF(F(x))

Это самая сложная группа тождеств. Упрощение в формулах $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ и подобных им удобнее всего зафиксировать с помощью графиков соответствующих функций.

2.8.1. График функции $y = \arcsin(\sin x)$

Чтобы построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$, прежде всего отметим ее простейшие свойства.

1. Эта функция определена при всех x (так как $\sin x$ определен при всех x, а его область значений, отрезок $[-1; 1]$, совпадает с областью определения $\arcsin x$).
2. Эта функция является периодической с периодом $T=2\pi$ (это простое следствие периодичности функции $\sin x$):

$$y(x+2\pi)\equiv\arcsin(\sin(x+2\pi))=$$
$$=\arcsin(\sin x)\equiv y(x).$$

3. Эта функция является нечетной (это простое следствие нечетности функций $\sin x$ и $\arcsin x$):

$$y(-x) \equiv \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin x) =$$
$$= -\arcsin(\sin x) \equiv -y(x).$$

Поэтому достаточно построить график нашей функции на отрезке $0 \le x \le \pi$. После этого с помощью центральной симметрии относительно начала координат мы построим график на отрезке $-\pi \le x \le 0$, а затем, периодически повторяя часть графика, соответствующую $x \in [-\pi; \pi]$, мы получим весь график. График на отрезке $0 \le x \le \pi$ мы будем строить в два приема: сначала построим часть графика, соответствующую $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, а затем — часть графика, соответствующую $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

При $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ непосредственно по определению $\arcsin a$ верно равенство $\arcsin(\sin x) = x$. Действительно, это равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = \sin x, \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Равенство системы верно очевидным образом, а неравенство является следствием того, что мы рассматриваем случай $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Этот же вывод очевиден и из рис. 2.10: если взять точку $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x)$ можно получить следующими построениями:

1. провести вертикальную прямую через x до пересечения с синусоидой в точке $M(x;\ \sin x)$;
2. провести горизонтальную прямую через точку M до пересечения с осью ординат; на оси ординат полученная точка изображает число $a = \sin x$;
3. через точку $a = \sin x$ на оси ординат провести горизонтальную прямую до пересечения с главной ветвью синусоиды в некоторой точке N: ясно, что точка N совпадет с точкой M;
4. спроектировать полученную точку N, т.е. фактически M, на ось абсцисс — это и будет $\arcsin a = \arcsin(\sin x)$.

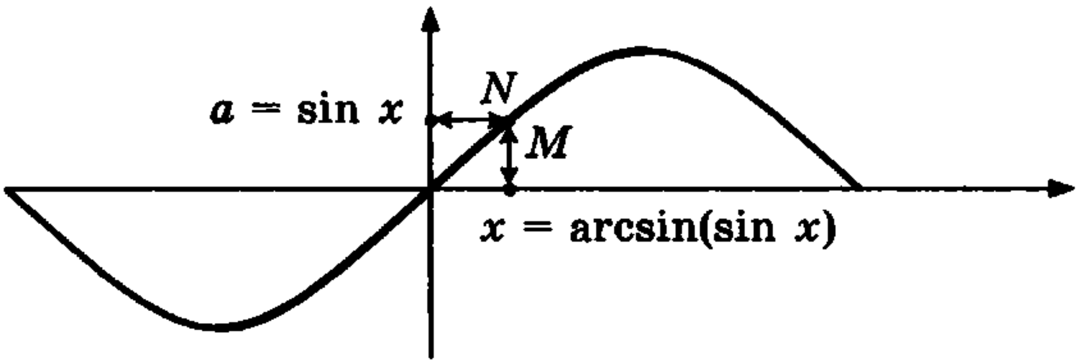


Рис. 2.10

На самом деле, проведенные рассуждения доказывают справедливость более сильного утверждения:

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (2.98)$$

Для $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ рис. 2.10 превратится в рис. 2.11.

При этом из симметрии синусоиды относительно вертикальной прямой $x = \frac{\pi}{2}$ следует, что

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\arcsin(\sin x) + x}{2},$$

что равносильно тождеству

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x, \text{ если } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]. \qquad (2.99)$$

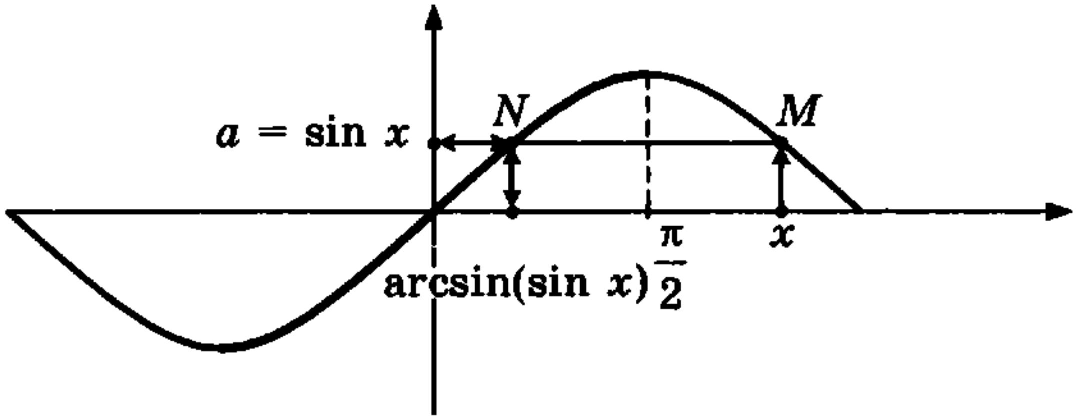


Рис. 2.11

Справедливость этого тождества можно установить и с помощью формального алгебраического определения; наше тождество равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x, \\ -\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Равенство системы — это известное тригонометрическое тождество, а неравенство системы равносильно неравенству $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$, которое является следствием того, что мы рассматриваем случай $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

На самом деле, проведенные рассуждения доказывают справедливость более сильного утверждения:

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x, \text{ если } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]. \qquad (2.100)$$

Это равенство можно получить и с помощью тождества

$$\arcsin(\sin(x \pm \pi)) = -\arcsin(\sin x), \qquad (2.101)$$

которое легко доказывается с использованием нечетности функции $y = \arcsin x$ и формулы приведения $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$:

$$\arcsin(\sin(x \pm \pi)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x).$$

Допустим, что $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Тогда $x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и, значит,

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi.$$

Применяя тождество (2.101), мы получим:

$$-\arcsin(\sin x) = x - \pi \Leftrightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x.$$

Полученный с помощью проведенных выше рассуждений график функции arcsin(sin x) изображен на рис. 2.12 (этот график похож на «спрямленную» синусоиду $y = \frac{\pi}{2} \cdot \sin x$).

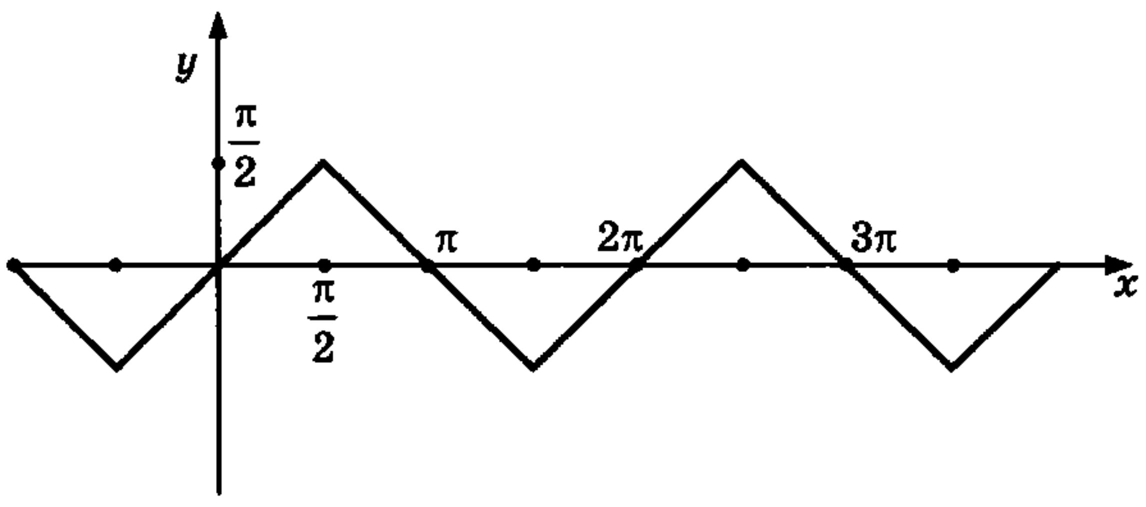


Рис. 2.12. График функции y = arcsin(sin x)

Ломаная на рис. 2.12 состоит из звеньев, которые наклонены к оси абсцисс под углом 45° или 135°, так что их угловые коэффициенты равны +1 или −1.

Звенья с угловым коэффициентом +1 пересекают ось абсцисс в точках вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому звено, пересекающее ось абсцисс в точке $2\pi n$, задается уравнением $y = x - 2\pi n$. Однако прямая $y = x - 2\pi n$ совпадает с графиком функции $y = \arcsin(\sin x)$ только для x, отличающимся от $2\pi n$ не больше, чем на $\frac{\pi}{2}$, т.е. $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$. Иначе говоря,

$$\arcsin(\sin x) = x - 2\pi n,$$

$$\text{если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \qquad (2.102)$$

Этот вывод можно получить и с помощью формального алгебраического определения $\arcsin a$: равенство $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi n$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(x - 2\pi n) = \sin x, \\ -\frac{\pi}{2} \le x - 2\pi n \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Неравенство системы — это в точности неравенство, задающее рассматриваемый диапазон изменения x, а равенство — тригонометрическое тождество, выражающее периодичность функции $y = \sin x$.

Звенья с угловым коэффициентом −1 пересекают ось абсцисс в точках вида $(2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому звено, пересекающее ось абсцисс в точке $(2n+1)\pi$, задается уравнением $y = -x + (2n+1)\pi$. Однако прямая

$y = -x + (2n+1)\pi$ совпадает с графиком функции $y = \arcsin(\sin x)$ только для x, отличающимся от $(2n+1)\pi$ не больше, чем на $\frac{\pi}{2}$, т.е. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$. Иначе говоря,

$$\arcsin(\sin x) = -x + (2n+1)\pi,$$

$$\text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n. \qquad (2.103)$$

Этот вывод можно получить и с помощью формального алгебраического определения $\arcsin a$: равенство $\arcsin(\sin x) = x + (2n+1)\pi$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(-x + (2n+1)\pi) = \sin x, \\ -\frac{\pi}{2} \le -x + (2n+1)\pi \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Неравенство системы равносильно неравенству $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, задающему рассматриваемый диапазон изменения x, а равенство сводится к периодичности функции $y = \sin x$ и известному тождеству $\sin(\pi - x) = \sin x$. Формулы (2.102) и (2.103) можно объединить в одну формулу:

$$\arcsin(\sin x) =$$

$$= \begin{cases} x - 2\pi n, \text{если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ -x + (2n+1)\pi, \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases} \qquad (2.104)$$

График функции $y = \arcsin(\sin x)$ можно задать соотношением, отличающимся от (2.104). Обратим внимание на то, что кусок этого графика, соответствующий значениям x, отстоящим от точки $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ не более, чем на π, т.е. для $x\in\left[-\frac{3\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, имеет характерную форму $\vee$ («птичка»). Так выглядит график функции $y = |x|$, вершина которого находится в точке с абсциссой $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ и ординатой $-\frac{\pi}{2}$. Таким образом, справедливо тождество

$$\arcsin(\sin x)=\left|x+\frac{\pi}{2}-2\pi n\right|-\frac{\pi}{2},$$

$$\text{если } x\in\left[2\pi n-\frac{3\pi}{2}; 2\pi n+\frac{\pi}{2}\right],\ n\in\mathbb{Z}. \qquad (2.105)$$

Этому тождеству можно придать еще одну интересную форму. Обратим внимание на то, что отрезки вида $\left[2\pi n-\frac{3\pi}{2}; 2\pi n+\frac{\pi}{2}\right]$, $n\in\mathbb{Z}$, пересекаются: поскольку

$$\frac{\pi}{2}+2\pi n=-\frac{3\pi}{2}+2\pi(n+1),$$

точка $2\pi n+\frac{\pi}{2}$ является правым концом отрезка, соответствующим значению n, и левым концом отрезка, соответствующим значению $n + 1$. Поэтому (2.105) можно переписать в виде:

$$\arcsin(\sin x)=\left|x+\frac{\pi}{2}-2\pi n\right|-\frac{\pi}{2},$$

$$\text{если } 2\pi n-\frac{3\pi}{2}\le x<2\pi n+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}. \qquad (2.106)$$

Неравенство в (2.106) равносильно неравенству

$$-\frac{3}{4}+n\le\frac{x}{2\pi}<\frac{1}{4}+n$$

$$\Updownarrow$$

$$n\le\frac{x}{2\pi}+\frac{3}{4}<n+1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\frac{x}{2\pi}+\frac{3}{4}\right]=n,$$

где $[t]$ обозначает целую часть числа t.

Поэтому (2.106) можно записать и в виде:

$$\arcsin(\sin x)=\left|x+\frac{\pi}{2}-2\pi\left[\frac{x}{2\pi}+\frac{3}{4}\right]\right|-\frac{\pi}{2}. \qquad (2.107)$$

Поскольку $[t]=t-\{t\}$, где $\{t\}$ — дробная часть числа t, тождество (2.107) можно превратить в тождество

$$\arcsin(\sin x)=2\pi\left|\left\{\frac{x}{2\pi}+\frac{3}{4}\right\}-\frac{1}{2}\right|-\frac{\pi}{2}. \qquad (2.108)$$

2.8.2. График функции y = arccos(cos x)

Легко проверить, что функция $f(x)$ = arccos(cos x) является четной и периодической с периодом $T=2\pi$. Поэтому достаточно построить ее график для $x\in[0;\pi]$. После этого с помощью осевой симметрии относительно оси ординат мы построим график на отрезке $-\pi\le x\le 0$, а затем, периодически повторяя часть графика, соответствующую $x\in[-\pi;\pi]$, мы получим весь график.

Для $x \in [0; \pi]$ формулу, которая задает функцию $f(x)$, можно упростить до x (это непосредственное следствие определения числа $\arccos a$).

Полученный с помощью этих рассуждений график функции $f(x)$ изображен на рис. 2.13.

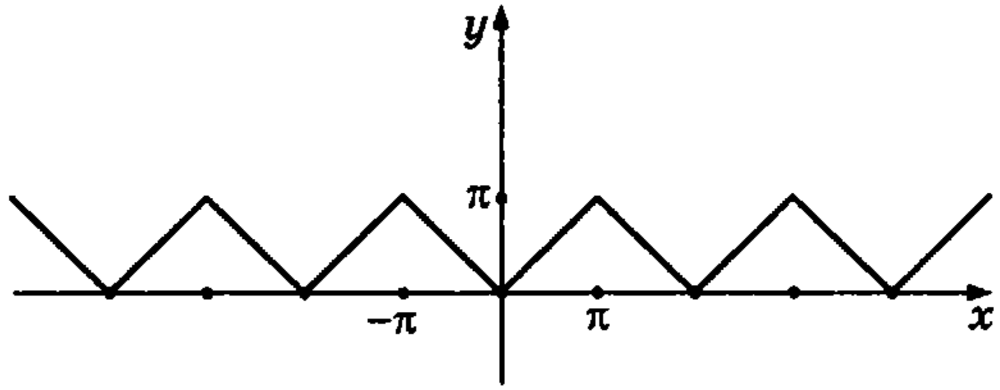


Рис. 2.13. График функции $y = \arccos(\cos x)$

Из этого рисунка ясно, что для $x \in [2\pi n - \pi; 2\pi n + \pi]$, $n \in \mathbb{Z}$, график функции $f(x)$ совпадает с графиком функции $|x - 2\pi n|$. Иначе говоря, справедливо тождество

$$\arccos(\cos x) = |x - 2\pi n|,$$

$$\text{если } x \in [2\pi n - \pi; 2\pi n + \pi], \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (2.109)$$

Так же, как и при выводе (2.107), (2.108), легко показать, что

$$\arccos(\cos x) = \left| x - 2\pi\left[\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right]\right| = \left|2\pi\left\{\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right\} - \pi\right|. \qquad (2.110)$$

Поскольку

$$\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= \arcsin\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2},$$

график функции $y = \arccos(\cos x)$ можно было бы получить, выполнив следующие два преобразования графика функции $y = \arcsin(\sin x)$:

1. сдвиг вправо на $\frac{\pi}{2}$ или, что то же самое, сдвиг влево оси ординат на $\frac{\pi}{2}$;
2. сдвиг полученного графика вверх на $\frac{\pi}{2}$ или, что то же самое, сдвиг вниз оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$.

2.8.3. График функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

Функция $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

1. определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
2. периодична с периодом $T = \pi$;
3. нечетная;
4. при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ совпадает с функцией $y = x$.

Поэтому ее график выглядит так, как представлено на рис. 2.14. При этом, т.к. функция $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ не определена при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, граничные точки наклонных отрезков отсутствуют.

Из этого рисунка ясно, что для $x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n + \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, график функции $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ совпадает с графиком функции $x - \pi n$. Иначе говоря, справедливо тождество

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi n,$$

$$\text{если } x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n + \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (2.111)$$

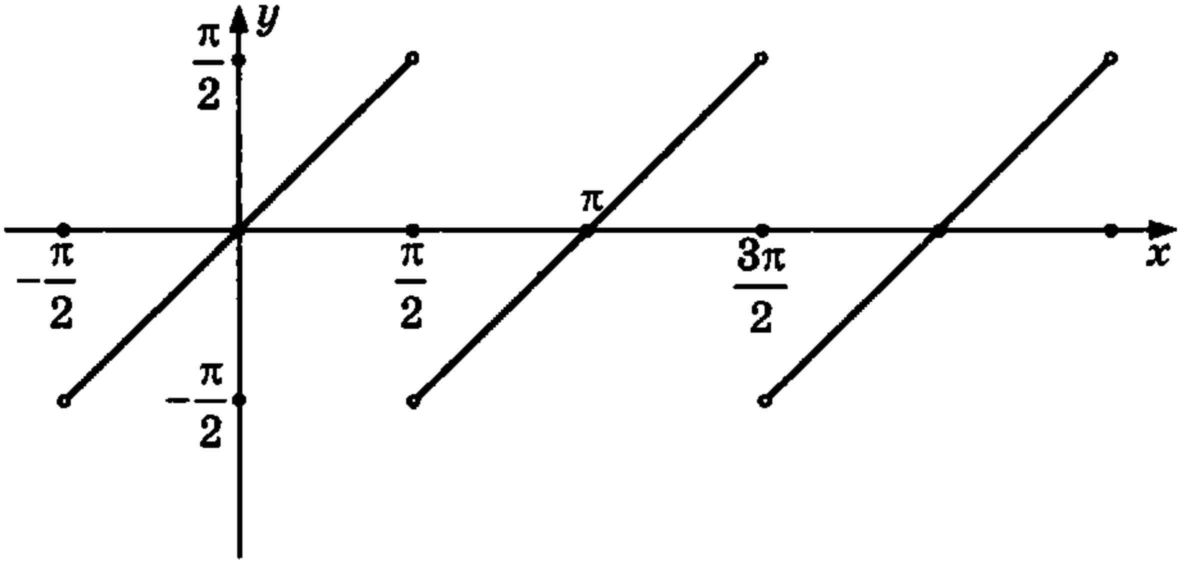


Рис. 2.14. График функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

Так же, как и при выводе (2.107), (2.108), легко показать, что

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi\left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right] = \pi\left\{\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\} - \frac{\pi}{2}. \qquad (2.112)$$

При применении этого тождества надо иметь в виду, что при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, его левая часть не определена, в то время как правая часть существует и равна $-\frac{\pi}{2}$.

2.8.4. График функции $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$

Функция $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$

1. определена при $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
2. периодична с периодом $T = \pi$;
3. при $x \in (0; \pi)$ совпадает с функцией $y = x$.

Поэтому ее график выглядит так, как представлено на рис. 2.15. При этом, т.к. функция $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ не определена при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, граничные точки наклонных отрезков отсутствуют.

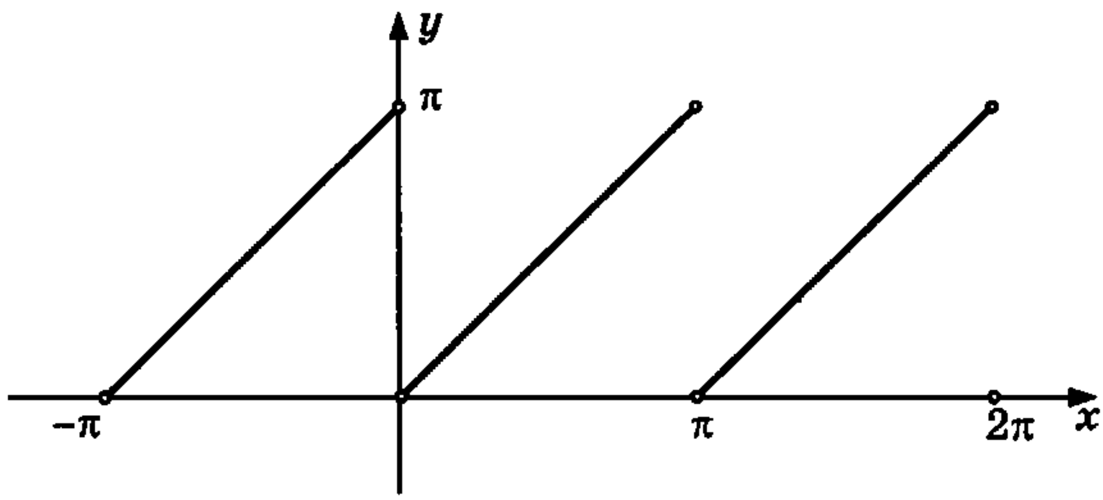


Рис. 2.15. График функции $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$

Из этого рисунка ясно, что для $x \in (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, график функции $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ совпадает с графиком функции $x - \pi n$. Иначе говоря, справедливо тождество

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi n,$$
$$\text{если } x \in (\pi n; \pi + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (2.113)$$

Так же, как и при выводе (2.107), (2.108), легко показать, что

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi\left[\frac{x}{\pi}\right] = \pi\left\{\frac{x}{\pi}\right\}. \qquad (2.114)$$

При применении этого тождества надо иметь в виду, что при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, его левая часть не определена, в то время как правая часть существует и равна 0.

Если учесть, что $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$, а для $t \notin \mathbb{Z}$ верно равенство $\{-t\} = 1 - \{t\}$, то из формулы (2.114) можно легко получить формулу (2.112) (она верна для $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$):

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \left\{\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\pi}\right\} = \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \left\{-\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \left(1 - \left\{\frac{x}{\pi} - \frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{\pi}{2} - \pi + \pi \cdot \left\{\frac{x}{\pi} - \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \pi \cdot \left\{\frac{x}{\pi} - \frac{1}{2}\right\} - \frac{\pi}{2} = \pi \cdot \left\{\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\} - \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2},$$

график функции $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ можно было бы получить, выполнив следующие два преобразования графика функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$:

1. сдвиг вправо на $\frac{\pi}{2}$ или, что то же самое, сдвиг влево оси ординат на $\frac{\pi}{2}$;
2. сдвиг полученного графика вверх на $\frac{\pi}{2}$ или, что то же самое, сдвиг вниз оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.1. Тождества и преобразования

Задача 3.1 (ВМК, 1998, устный) *Вычислите*

$$\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решение задачи 3.1. Поскольку $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, задача сводится к подсчету $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. Это число равно $\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1$.

Ответ: -1.

Задача 3.2 (ВМК, 1999, июль, № 1) *Известно, что* $\operatorname{ctg}\alpha=1$. *Сравните*

$$\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin\alpha-\frac{1}{4}}\right) \text{ и } \frac{19\pi}{24}.$$

Решение задачи 3.2. Если $\operatorname{ctg}\alpha=1$, то $\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi n$ для некоторого целого числа n. Тогда $\sin\alpha=$ $=(-1)^n\sin\frac{\pi}{4}=(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. Соответственно, первое число равно $\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}}\right)$. Если n — четное, то под знаком радикала стоит отрицательное число

$-\dfrac{5}{4}$. Поэтому этот случай невозможен. Если же n — нечетное, то под знаком радикала стоит положительное число $\dfrac{3}{4}$. В этом случае первое число равно

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}=\frac{20\pi}{24}>\frac{19\pi}{24}.$$

Ответ: $\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{4}}\right)>\dfrac{19\pi}{24}$.

Задача 3.3 (ВМК, 2002, устный) *Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию*

$$\frac{\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\left(2+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)}{2}\le\frac{\pi}{n}.$$

Решение задачи 3.3. Поскольку числа 3 и $2+\dfrac{5}{\sqrt{3}}$, очевидно, больше, чем $\sqrt{3}$, а $y=\operatorname{arctg}x$ — монотонно возрастающая функция, можно гарантировать справедливость неравенств

$$\frac{\pi}{3}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\pi}{3}<\operatorname{arctg}\left(2+\frac{5}{\sqrt{3}}\right)<\frac{\pi}{2}.$$

Тогда и среднее арифметическое этих чисел, т.е. число

$$A=\frac{\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\left(2+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)}{2},$$

лежит на интервале $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поскольку $A > 0$, исходное неравенство можно переписать в виде:

$$n \geq \frac{\pi}{A}.$$

Из приведенной оценки для A следует, что $2 < \frac{\pi}{A} < 3$. Поэтому $n = 1$ или 2.

Ответ: $n = 1$; 2.

Задача 3.4 (ВМК, 2004, устный) *Сравните числа* $\arcsin\frac{5}{7}$ *и* $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Решение задачи 3.4. Дробь $\frac{5}{7}$ приближенно равна 0.714. Нам известны значения $\arcsin x$ для следующих «красивых» значений x: $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}866$. Поэтому

$$\arcsin\frac{5}{7} \approx \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

С другой стороны,

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \approx 0{,}756.$$

Как показывают эти приближения, видимо,

$$\arcsin\frac{5}{7} > \frac{2}{\sqrt{7}}. \qquad (3.1)$$

Однако современные стандарты математической строгости не позволяют считать проведенные рассуждения доказательством неравенства (3.1). Дело в том, что знак $\approx$ не имеет точного смысла. Тем не менее, проведенные рассуждения позволяют высказать разумную гипотезу

$$\arcsin\frac{5}{7}>\frac{\pi}{4}>\frac{2}{\sqrt{7}}. \qquad (3.2)$$

Докажем это двойное неравенство.

В силу графического определения числа $\arcsin a$, представленного рис. 1.13, неравенство $\arcsin\frac{5}{7}>\frac{\pi}{4}$ равносильно неравенству

$$\sin\frac{\pi}{4}<\frac{5}{7}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{5}{7}\Leftrightarrow 49<50$$

и поэтому истинно.

Неравенство $\frac{\pi}{4}>\frac{2}{\sqrt{7}}$ равносильно неравенству $\pi>\frac{8\sqrt{7}}{7}$, которое истинно, т.к. $\pi>3{,}1$, а $\frac{8\sqrt{7}}{7}<3.1$.

Последний этап доказательства опирается на «известный» факт: $\pi = 3{,}14...$ Строгое доказательство этого результата — довольно тяжелая задача. Поэтому было бы интересно использовать такую оценку числа π, которую мы могли бы строго обосновать. Для этого рассмотрим окружность с радиусом $R = 1$ и вписанный в нее правильный 12-угольник. Его сторона равна

$$a=2\sin 15^\circ=\sqrt{\sin^2 15^\circ}=2\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Ясно, что длина окружности, т.е. 2π, больше периметра P_{12} этого 12-угольника: $2\pi > 12\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, так что $\pi > 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. Число $3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ приближенно равно 3,106, так что этой оценки заведомо должно хватить для доказательства неравенства $\pi > \frac{8\sqrt{7}}{7}$. Действительно, это неравенство вытекает из неравенства

$$3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) > \frac{8\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow 36\left(2-\sqrt{3}\right) > \frac{64}{7} \Leftrightarrow \sqrt{3} < \frac{110}{63} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11907 < 12100.$$

О т в е т: первое число больше.

Задача 3.5 (географ., 2001, май, № 4) *Сравните два числа* $\frac{2\pi}{5}$ *и* $\arccos\frac{3}{10}$.

Решение задачи 3.5. Поскольку как $\frac{2\pi}{5}$, так и $\arccos\frac{3}{10}$ лежат на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, можно сравнивать числа $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72° = \sin 18°$ и $\frac{3}{10}$. При этом в силу монотонного убывания функции $y = \cos x$ на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ число $\frac{2\pi}{5}$ больше (меньше) числа $\arccos\frac{3}{10}$ тогда и только тогда, когда число $\sin 18°$ меньше (больше) числа $\frac{3}{10}$.

Угол 18° замечателен тем, что, хотя он и не связан с обычными «красивыми» углами (30°, 45°, 60°), тригонометрические функции от этого угла (и от кратных ему углов 36°, 54°, 72°) могут быть выражены в радикалах (по этой причине он часто встречается в школьной тригонометрии).

Это можно сделать, например, исходя из соотношения $\sin 36° = \cos 54°$. Применяя формулы $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, мы получим после сокращения на $\cos 18°$:

$$2\sin 18° = 4\cos^2 18° - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2 18° + 2\sin 18° + 2\sin 18° - 1 = 0,$$

откуда

$$\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$
$$\text{или } \sin 18° = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Поскольку $\sin 18° > 0$, можно утверждать, что $\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Таким образом, задача свелась к сравнению чисел $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ и $\frac{3}{10}$:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \vee \frac{3}{10} \Leftrightarrow 5\sqrt{5} \vee 11 \Leftrightarrow 125 \vee 121.$$

Следовательно, $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > \frac{3}{10}$, тогда $\frac{2\pi}{5} < \arccos\frac{3}{10}$.

О т в е т: $\frac{2\pi}{5} < \arccos\frac{3}{10}$.

Задача 3.6 (ВМК, устный, 2004) *Вычислите* $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

Решение задачи 3.6. В качестве базы для решения задачи естественно использовать тождество (2.98):

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Имея его в виду, прежде всего преобразуем $\cos\frac{33\pi}{5}$ к виду $\sin x$ для некоторого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\cos\frac{33\pi}{5} = \cos\left(6\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

Поэтому

$$\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{10}$.

Задача 3.7 (геолог., 1998, устный) *Вычислите* $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение задачи 3.7. Для решения задачи можно использовать тождество (2.36):

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Можно провести и независимые рассуждения, дословное повторение которых позволяет доказать и общее тождество (2.36).

Выражение $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ можно рассматривать как $\operatorname{tg}\alpha$, где про угол α мы знаем, что $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь нашу задачу можно сформулировать следующим образом:

вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, *если известен* $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ *и промежуток, в котором располагается угол* α: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ясно, что для ее решения нужно $\operatorname{tg}\alpha$ выразить через $\sin\alpha$.

Начнем с нахождения $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\cos\alpha} = -\frac{1}{3\cos\alpha}.$$

Теперь задача свелась к подсчету $\cos\alpha$. Для этого воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$$

$$\Updownarrow$$

$$|\cos\alpha| = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Подчеркнем, что, имея только значение $\sin\alpha$, мы можем (однозначно) найти лишь абсолютную величину $\cos\alpha$. Чтобы убрать знак модуля, необходимо знать, положителен или отрицателен $\cos\alpha$. Для этого используем информацию о промежутке, в котором располагается угол α: при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ число $\cos\alpha$ неотрицательно, так что $\cos\alpha = |\cos\alpha| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Теперь для $\operatorname{tg}\alpha$ мы имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3\cos\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задача 3.8 (геолог., 1998, устный) *Вычислите* $\cos(2\operatorname{arctg}(-4))$.

Решение задачи 3.8. Для решения задачи можно использовать тождество (2.43):

$$\cos(2\operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-16}{1+16} = -\frac{15}{17}.$$

Можно провести и независимые рассуждения, дословное повторение которых позволяет доказать и общее тождество (2.43).

Выражение $\cos(2\operatorname{arctg}(-4))$ можно рассматривать как $\cos 2\alpha$, где про угол α мы знаем, что $\operatorname{tg}\alpha = -4$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Теперь нашу задачу можно сформулировать следующим образом: *вычислите* $\cos 2\alpha$, *если известен*

$\mathrm{tg}\,\alpha = -4$ *и промежуток, в котором располагается угол* α: $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ясно, что для ее решения нужно $\cos 2\alpha$ выразить через $\mathrm{tg}\,\alpha$. Начнем со следующего преобразования:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{1} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

В числителе и знаменателе последней дроби стоят однородные выражения второй степени относительно $a = \sin\alpha$ и $b = \cos\alpha$. В соответствии с общей теорией однородных многочленов нужно числитель и знаменатель этой дроби разделить на $\cos^2\alpha$ (или $\sin^2\alpha$). Конечно, делать это можно, только если мы уверены, что $\cos\alpha \neq 0$ (соответственно, $\sin\alpha \neq 0$); в нашем случае, очевидно, это условие выполнено, т.к. $\mathrm{tg}\,\alpha$ существует. После этой операции мы получим:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}, \text{ если } \cos\alpha \neq 0.$$

Для нашей задачи это тождество даст:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - (-4)^2}{1 + (-4)^2} = -\frac{15}{17}.$$

Отметим, что в данном случае информация о положении числа a не играла никакой роли.

О т в е т: $-\frac{15}{17}$.

Задача 3.9 (ВМК, 2000+2003, устный) *Вычислите* $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}+\operatorname{arctg}\dfrac{7}{23}$.

Решение задачи 3.9. Для решения задачи можно использовать тождества (2.83), (2.18) и (2.94):

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=\operatorname{arcctg}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{4}}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=$$

$$=\operatorname{arcctg}\frac{15}{8}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=\operatorname{arctg}\frac{8}{15}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=$$

$$=\operatorname{arcctg}\frac{1-\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{23}}{\frac{8}{15}+\frac{7}{23}}=\operatorname{arcctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Однако, поскольку запомнить использованные тождества очень тяжело, в условиях экзамена лучше провести независимые рассуждения, слегка модифицируя доказательства этих общих тождеств.

Для этого сформулируем исходную задачу следующим образом: *вычислите* $\varphi=2\alpha+\beta$, *где про углы* α *и* β *мы знаем, что* $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{7}{23}$ *и* $\alpha,\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку нам известны $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, подсчитаем $\operatorname{tg}\varphi$, а затем с помощью этой информации будем находить сам угол φ.

Конечно, прежде всего необходимо убедиться, что $\operatorname{tg}\varphi$ существует. Для этого локализуем угол φ (т.е. найдем промежуток, в котором он располагается); эта информация, кроме того, окажется полезной на последнем этапе решения.

Если использовать отмеченные выше общие неравенства $-\frac{\pi}{2}<\alpha$, $\beta<\frac{\pi}{2}$, то относительно φ можно утверждать лишь то, что $-\frac{3\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ — в этой ситуации нельзя исключить возможности $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, когда $\operatorname{tg}\varphi$ не существует.

Однако α и β — совершенно конкретные углы и можно указать гораздо более узкие промежутки, в которых они гарантированно расположены, чем промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, в который попадают все арктангенсы. Именно, поскольку числа $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{23}$ — положительны и меньше, чем $\frac{\sqrt{3}}{3}$, можно утверждать, что $0<\alpha$, $\beta<\frac{\pi}{6}$. Соответственно, $0<2\alpha<\frac{\pi}{3}$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ и поэтому существуют $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{tg}\varphi$.

Теперь с помощью известных формул тригонометрии мы имеем:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{8}{15},$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{8}{15}+\frac{7}{23}}{1-\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{23}}=1.$$

Равенство $\operatorname{tg}\varphi=1$ не определяет φ однозначно. На его основе можно утверждать лишь то, что $\varphi=\frac{\pi}{4}+\pi n$ для некоторого целого числа n. Однако ранее мы установили, что $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. На этот промежуток попадает лишь одно число φ, такое, что $\operatorname{tg}\varphi=1$ — это $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 3.10 (ВМК, 2003, устный) *Вычислите* arctg 2 + arctg 4 + arctg 13.

Решение задачи 3.10. Для решения задачи можно использовать тождества (2.94), (2.4), (2.18) и (2.95):

$$\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}4+\operatorname{arctg}13=\operatorname{arcctg}\frac{1-2\cdot 4}{2+4}+\operatorname{arctg}13=$$

$$=\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{6}\right)+\operatorname{arctg}13=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{7}{6}+\operatorname{arctg}13=$$

$$=\pi+\left(\operatorname{arctg}13-\operatorname{arctg}\frac{6}{7}\right)=\pi-\operatorname{arctg}\frac{13-\frac{6}{7}}{1+13\cdot\frac{6}{7}}=$$

$$=\pi+\operatorname{arctg}1=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}.$$

Однако, поскольку запомнить использованные тождества очень тяжело, в условиях экзамена лучше провести независимые рассуждения, слегка модифицируя доказательства этих общих тождеств.

Для этого сформулируем исходную задачу следующим образом:

вычислите $\varphi=\alpha+\beta+\gamma$, *где про углы* α, β, γ *мы знаем, что* $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{tg}\beta=4$, $\operatorname{tg}\gamma=13$ *и* $\alpha, \beta, \gamma\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку нам известны численные значения тангенсов этих углов, их можно локализовать гораздо точнее: $\alpha, \beta, \gamma\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $\alpha+\beta\in\left(\frac{2\pi}{3};\pi\right)$, $\varphi\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$. Отсюда, в частности, следует, что существуют $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}\varphi$.

Теперь с помощью известных формул тригонометрии мы имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{2+4}{1-2\cdot4}=-\frac{6}{7},$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma}=\frac{-\frac{6}{7}+13}{1+\frac{6}{7}\cdot13}=1.$$

Равенство $\operatorname{tg}\varphi=1$ не определяет φ однозначно. На его основе можно утверждать лишь то, что $\varphi=\frac{\pi}{4}+\pi n$ для некоторого целого числа n. Однако ранее мы установили, что $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$. На этот промежуток попадает лишь одно число φ, такое, что $\operatorname{tg}\varphi=1$ — это $\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}$.

Задача 3.11 (мех-мат., устный, 1999) *Вычислите*

$$\operatorname{arctg}8+\operatorname{arctg}\frac{19}{22}+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Решение задачи 3.11. Для решения задачи можн использовать тождества (2.4), (2.94), и (2.10):

$$\operatorname{arctg} 8+\operatorname{arcctg}\frac{19}{22}+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\pi+\operatorname{arctg} 8+\operatorname{arctg}\frac{19}{22}-\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}=$$

$$=\pi+\operatorname{arcctg}\frac{1-8\cdot\frac{19}{22}}{8+\frac{19}{22}}-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=\pi+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=$$

$$=2\pi-\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=2\pi-\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)=$$

$$=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

Однако, поскольку запомнить использованные то ждества очень тяжело, в условиях экзамена лучш провести независимые рассуждения, слегка модифи цируя доказательства этих общих тождеств.

Для этого сформулируем исходную задачу сле дующим образом:

вычислите $\varphi=\alpha+\beta+\gamma$, *где про углы* α, β, γ *мы зн ем, что* $\operatorname{tg}\alpha=8$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{19}{22}$, $\operatorname{ctg}\gamma=-\frac{3}{2}$ *и* $\alpha, \beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\gamma\in(0;\pi)$.

Поскольку нам известны численные значения тан генсов этих углов, их можно локализовать гораздо точнее: $\alpha\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$, $\gamma\in\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$.

Поэтому $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$, $\varphi\in\left(\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$. Отсюда, в частности, следует, что существует $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, в то время как гарантировать существование $\operatorname{tg}\varphi$ мы не можем, т.к. на интервале $\left(\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$ лежит точка $x=\frac{3\pi}{2}$, в которой значение $\operatorname{tg}\,x$ не определено.

Теперь с помощью известных формул тригонометрии мы имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{8+\frac{19}{22}}{1-8\cdot\frac{19}{22}}=-\frac{3}{2}.$$

Поскольку, как мы отмечали, гарантировать существование $\operatorname{tg}\varphi$ нельзя, мы не можем подсчитывать (как это делали в задачах 3.9, 3.10) $\operatorname{tg}\varphi$. Вместо этого обратим внимание на то, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}\gamma$. Это равенство можно переписать в виде $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$, откуда следует, что

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma+\pi n,\ \text{для некоторого целого числа } n$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \text{для некоторого целого числа } n.$$

Ранее мы установили, что $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$. На этот промежуток попадает лишь одно число φ, такое, что $\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi n$ — это $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Задача 3.12 (ВМК, устный, 1998+2005) *Вычислите:*

$$\arcsin(\cos\arcsin x) + \arccos(\sin\arccos x).$$

Решение задачи 3.12. Прежде всего воспользуемся тождествами (2.27) и (2.24): $\cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}$, $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$. Поэтому фактически наша задача сводится к вычислению $\arcsin a + \arccos a$, где $a = \sqrt{1-x^2} \in [0;1]$. Применяя тождество (2.9), мы получим, что это выражение равно $\frac{\pi}{2}$ (если x входит в область определения исходного выражения, т.е. если $x \in [-1;1]$).

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ (если $x \in [-1;1]$).

3.2. Графики

Задача 3.13 (ВМК, 1995, устный) *Вычислите кратчайшее расстояние от точки с координатами* $(-\sqrt{3};1)$ *до графика функции*

$$y = \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right).$$

Решение задачи 3.13. С помощью тождества (2.63):

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}, -1 \le x \le 1$$

формулу, которая задает нашу функцию, можно привести к виду:

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{2}}, -1 \le x \le 1.$$

Подчеркнем, что, хотя выражение $\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ определено при $x \in (-\infty; 1]$, заданная нам функция определена лишь на отрезке $x \in [-1; 1]$. График этой функции изображен на рис. 3.1.

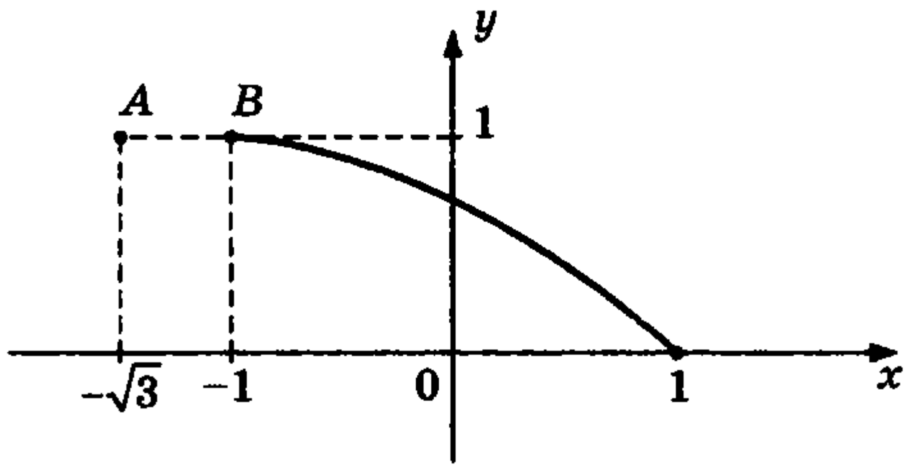


Рис. 3.1

Расстоянием от точки A до множества M называется наименьшее из расстояний между A и точками множества M:

$$\rho(A; M) = \min_{B \in M} \rho(A; B).$$

Отметим, что этот минимум не обязан достигаться. Поэтому под расстоянием от точки до множества, вообще говоря, подразумевают так называемую точную нижнюю грань (ее обозначают символом inf) расстояний $\rho(A; B)$, где точка B пробегает множество M:

$$\rho(A; M) = \inf_{B \in M} \rho(A; B).$$

В нашем случае из рис. 3.1 ясно, что наименьшее расстояние от точки $A(-\sqrt{3}; 1)$ до точек графика данной функции достигается в точке $B(-1;\ 1)$. Поэтому искомое расстояние равно $AB = \sqrt{3} - 1$.

Ответ: $AB = \sqrt{3} - 1$.

Задача 3.14 (ВМК, 1996, устный) *Постройте график функции*

$$\cos(\arcsin 4x^2).$$

Решение задачи 3.14. С помощью тождества

$$\cos(\arcsin t) = \sqrt{1 - t^2}$$

формулу, которая задает нашу функцию, можно привести к виду:

$$y = \sqrt{1 - 16x^4}.$$

Эта функция определена на отрезке $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$. На этом множестве ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y = \sqrt{z}$ и $z = 1 - 16x^4$. Поскольку функция $y = \sqrt{z}$ монотонно возрастает, поведение функции $y = \sqrt{1 - 16^4}$ (т.е. промежутки ее возрастания и убывания) совпадает с поведением функции $z = 1 - 16x^4$. Поэтому на отрезке $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ наша функция возрастает от 0 до 1, а на промежутке $0 \le x \le \frac{1}{2}$ убывает от 1 до 0.

Ответ: Примерный вид графика функции $y = \sqrt{1 - 64x^4}$ изображен на рис. 3.2.

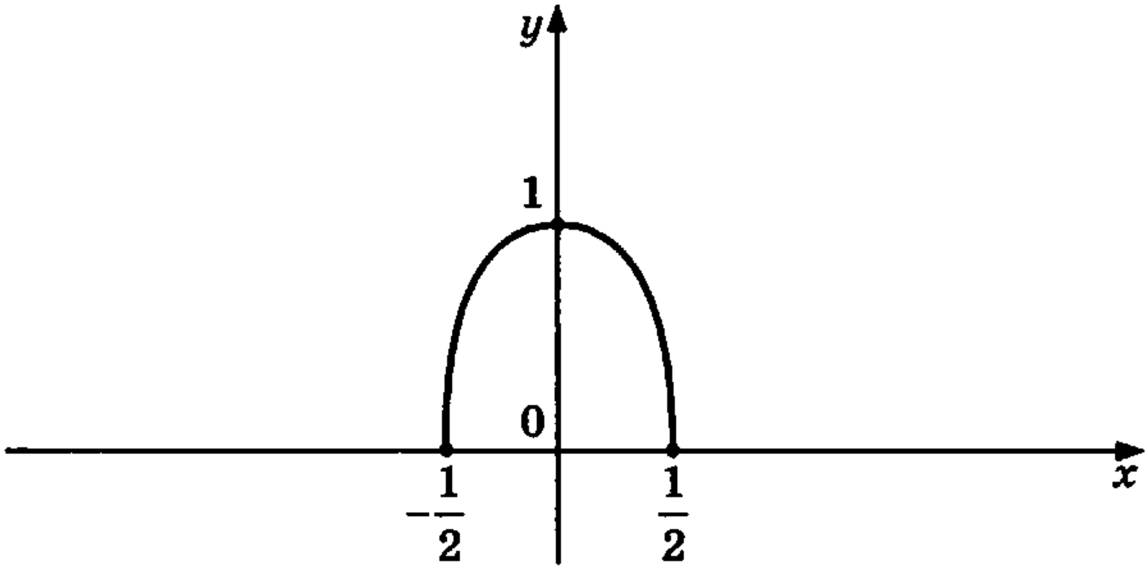


Рис. 3.2

Задача 3.15 (ВМК, 1999, устный) *Докажите, что*

$$\arcsin(|\sin x|) = \arccos(|\cos x|).$$

Решение задачи 3.15. Рассмотрим функции
$f(x) = \arcsin(|\sin x|)$,
$g(x) = \arccos(|\cos x|)$.
Обе эти функции четные, т.к.

$$f(-x) = \arcsin(|\sin(-x)|) = \arcsin(|-\sin x|) =$$
$$= \arcsin(|\sin x|) = f(x),$$
$$g(-x) = \arccos(|\cos(-x)|) = \arccos(|\cos x|) = g(x),$$

и периодические с периодом $T = \pi$, т.к.

$$f(x+\pi) = \arcsin(|-\sin x|) = \arcsin(|\sin x|) = f(x),$$

$$g(x+\pi) = \arccos(|-\cos x|) = \arccos(|\cos x|) = g(x).$$

Поэтому достаточно доказать требуемое равенство только для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Действительно, в силу четности тогда можно гарантировать его справедливость для

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, а значит, и для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Длина этого отрезка равна π, т.е. общему периоду $f(x)$ и $g(x)$. Следовательно, равенство $f(x) = g(x)$ будет выполнено и для всех $x \in \mathbb{R}$.

Но для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ формулы, которые задают функции $f(x)$ и $g(x)$, можно упростить. Прежде всего, на этом отрезке как $\sin x$, так и $\cos x$ неотрицательны и поэтому $|\sin x| = \sin x$, $|\cos x| = \cos x$. Кроме того, этот отрезок является подмножеством отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, на котором верно равенство $\arcsin(\sin x) = x$ и подмножеством отрезка $[0; \pi]$, на котором верно равенство $\arccos(\cos x) = x$. Поэтому

$$f(x) = \arcsin(|\sin x|) = \arcsin(\sin x) = x,$$

$$g(x) = \arccos(|\cos x|) = \arccos(\cos x) = x,$$

так что действительно $f(x) = g(x)$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задача 3.16 (ВМК, 1999, устный) *Постройте график функции*

$$y(x) = \arcsin(|\sin x|).$$

Решение задачи 3.16. В ходе решения задачи 3.15 мы установили, что наша функция является четной и периодической с периодом $T = \pi$. Поэтому достаточно построить ее график для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Действительно, в силу четности часть графика, соответствующую

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, можно получить осевой симметрией относительно оси Oy. Это даст вид графика для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Длина этого отрезка равна π, т.е. периоду $f(x)$. Периодически повторяя эту часть графика, мы получим весь график.

Кроме того, мы установили, что для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ формулу, которая задает функцию $f(x)$, можно упростить до x, т.е. первая часть графика — это соответствующая часть биссектрисы первого координатного угла.

Представляя эти рассуждения графически, мы получим рис. 3.3.

О т в е т:

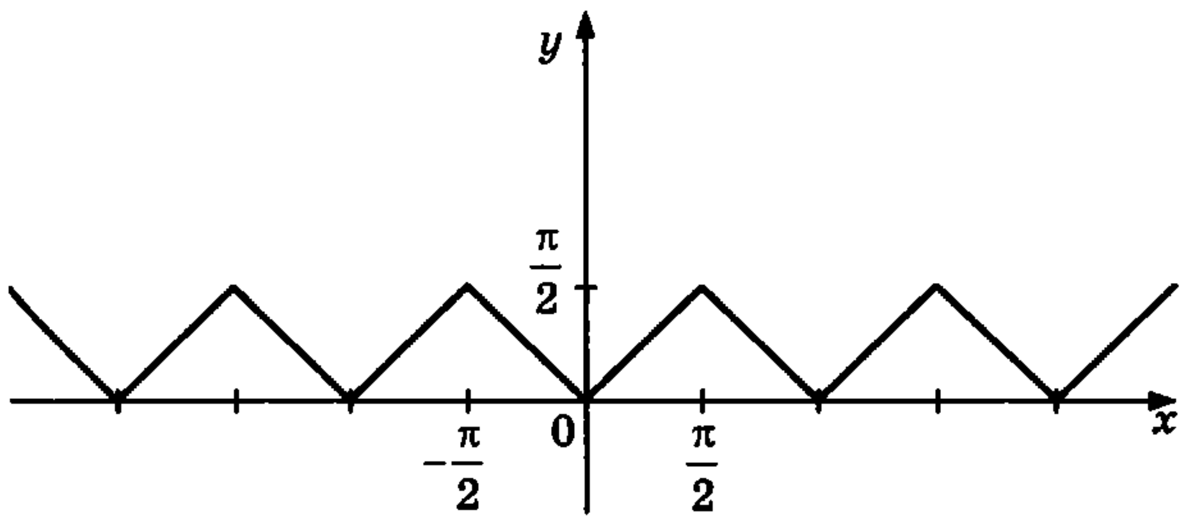


Рис. 3.3

Задача 3.17 (ВМК, 1995, устный) *Постройте график функции* $y(x) = \arcsin^2(\sin x) - \operatorname{arctg}^2(\operatorname{tg} x)$.

Решение задачи 3.17. Как и при решении задачи 3.15, легко доказать, что наша функция является четной и периодической с периодом $T = \pi$, а при

$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ формулу, которая задает функцию $y(x)$, можно упростить до $x^2 - x^2 = 0$. Отметим, что для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, функция не определена. Поэтому ее графиком будет горизонтальная прямая, совпадающая с осью Ox, из которой выколоты точки вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Примерный вид графика представлен на рис. 3.4.

Ответ:

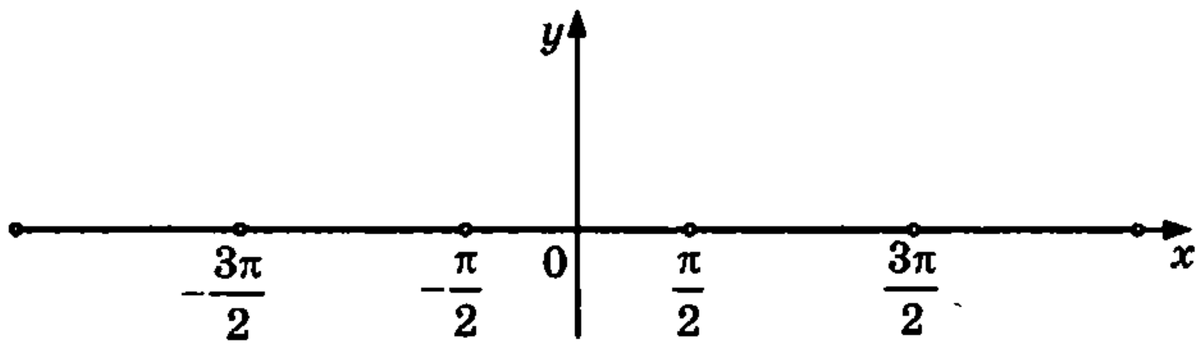


Рис. 3.4

Задача 3.18 (ВМК, 1999, устный) *Найдите наименьшее и наибольшее значения функции*

$$f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x + 1.$$

Решение задачи 3.18. Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, функцию $f(x)$ можно привести к виду

$$f(x) = \arcsin x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) + 1.$$

Поэтому ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y = -z^2 + \frac{\pi}{2}z + 1$ и $z = \arcsin x$. При изменении переменной x от -1 до $+1$ (т.е. в области определения $f(x)$) значения переменной z заполняют отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ совпадают с наименьшим и наибольшим значениями функции $y=-z^2+\frac{\pi}{2}z+1$ на отрезке $z\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Вершина параболы $y=-z^2+\frac{\pi}{2}z+1$ имеет координаты $z_0=\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $y_0=1+\frac{\pi^2}{16}$, а ее значения в точках $z=-\frac{\pi}{2}$ и $z=\frac{\pi}{2}$ равны $1-\frac{\pi^2}{2}$ и 1 соответственно. Поэтому на отрезке $-\frac{\pi}{2}\le z\le\frac{\pi}{2}$ наименьшее и наибольшее значения функции $y=-z^2+\frac{\pi}{2}z+1$ равны $1-\frac{\pi^2}{2}$ и $1+\frac{\pi^2}{16}$ соответственно.

Ответ: $f_{\min}=1-\frac{\pi^2}{2}$, $f_{\max}=1+\frac{\pi^2}{16}$.

Задача 3.19 (геолог., 2004, устный) *Найдите минимальное значение функции*

$$y = (\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2.$$

Решение задачи 3.19. Поскольку $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$, функцию $y = (\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2$ можно привести к виду

$$y=2(\operatorname{arctg} x)^2-\pi\operatorname{arctg} x+\frac{\pi^2}{4}.$$

Поэтому ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y=2z^2-\pi z+\dfrac{\pi^2}{4}$ и $z=\operatorname{arctg} x$. При изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной z заполняют интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Поэтому наименьшее значение функции $y(x)$ совпадает с наименьшим значением функции $y=2z^2-\pi z+\dfrac{\pi^2}{4}$ на интервале $z\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Вершина параболы $y=2z^2-\pi z+\dfrac{\pi^2}{4}$ имеет координаты $z_0=\dfrac{\pi}{4}\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y_0=\dfrac{\pi^2}{8}$. Поэтому на интервале $-\dfrac{\pi}{2}<z<\dfrac{\pi}{2}$ наименьшее значение функции $y=2z^2-\pi z+\dfrac{\pi^2}{4}$ равно $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Отметим, что при $x\to-\infty$ функция $y(x)$ монотонно стремится к пределу, равному $\dfrac{5\pi^2}{4}$, а при $x\to+\infty$ функция $y(x)$, монотонно возрастая, стремится к пределу, равному $\dfrac{\pi^2}{4}$. Таким образом, наибольшее значение $y(x)$ не существует (не следует путать с ним точную верхнюю грань значений $y(x)$, равную $\dfrac{5\pi^2}{4}$).

Ответ: $y_{\min}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

Задача 3.20 (эконом., 1993, № 4) *Найдите периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условиями*

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin\left((y-1)^2\right) \le \pi(x+2), \\ 2|y-1|-x \ge 0. \end{cases}$$

Решение задачи 3.20. Раскроем модуль в первом неравенстве системы. Имея в виду сокращение на общий множитель $x + 2$, рассмотрим три случая: $x + 2 > 0$, $x + 2 < 0$, $x + 2 = 0$. В первом случае это неравенство сведется к неравенству

$$\arcsin\left((y-1)^2\right) \le \frac{\pi}{2},$$

которое выполнено всюду, где определено, т.е. при

$$(y-1)^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le y \le 2.$$

Во втором случае это неравенство сведется к неравенству

$$\arcsin\left((y-1)^2\right) \le -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (y-1)^2 = -1 \Leftrightarrow \varnothing.$$

И наконец, в третьем случае это неравенство сведется к неравенству

$$0 \cdot \arcsin\left((y-1)^2\right) \le 0,$$

которое также выполнено всюду, где определено, т.е. при $0 \le y \le 2$.

Таким образом, первое неравенство равносильно системе из двух неравенств $0 \le y \le 2$, $x \ge -2$. На координатной плоскости оно задает правую половину горизонтальной полосы, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = 2$, $x = -2$.

Второе неравенство системы распадается на два неравенства: $y \ge 1+\frac{x}{2}$, $y \le 1-\frac{x}{2}$.

Поэтому исходная система задает на координатной плоскости многоугольник $ABCDE$ (с внутренностью), изображенный на рис. 3.5.

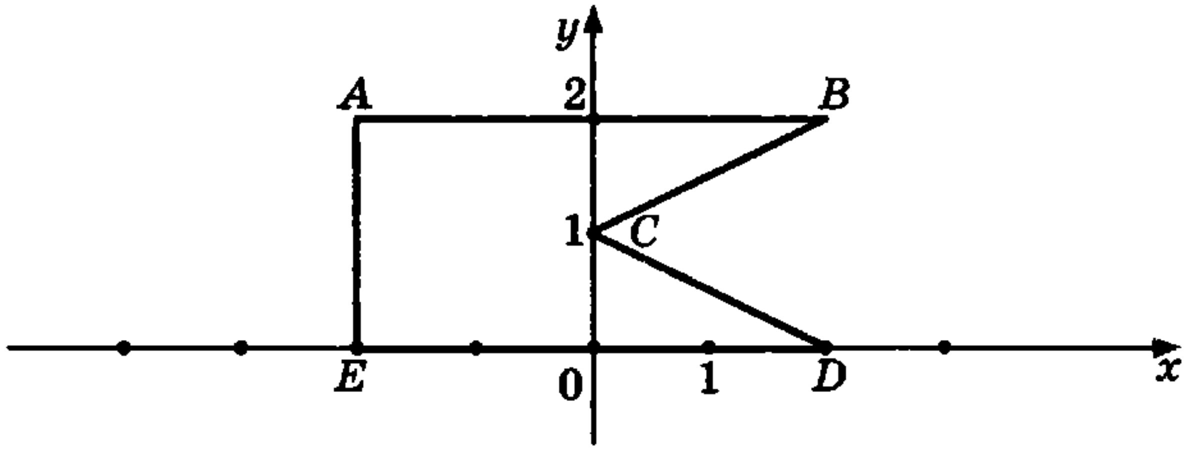


Рис. 3.5

Длины сторон этого многоугольника легко определить:

$AB = 4$, $BC = \sqrt{5}$, $CD = \sqrt{5}$, $DE = 4$, $AE = 2$.

Поэтому его периметр равен $10+2\sqrt{5}$.

Ответ: $10+2\sqrt{5}$.

Задача 3.21 (подготов. отд. (ВМК, физ., эконом.), 1998, № 6) *Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями*

$$\begin{cases} (\arccos(\cos x))^2 + y^2 \ge 1, \\ x^2 + 2|xy| + y^2 \le 4\pi^2. \end{cases}$$

Решение задачи 3.21. В силу ранее доказанного тождества (2.109) для $x \in [2\pi n - \pi; 2\pi n + \pi]$, $n \in \mathbb{Z}$, график функции $f(x) = \arccos(\cos x)$ совпадает с графиком функции $|x - 2\pi n|$. Соответственно, в вертикальной полуполосе $2\pi n-\pi\le x\le 2\pi n+\pi$ первое неравенство системы равносильно неравенству $(x-2\pi n)^2+y^2\ge 1$. Это неравенство задает внешность круга с центром в точке $(2\pi n;0)$ и радиусом $R=1$. Объединяя эти фигуры для всех $n\in\mathbb{Z}$, мы получим плоскость, из которой вырезаны всевозможные круги радиуса $R=1$ с центрами в точках вида $(2\pi n;0)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Второе неравенство системы равносильно неравенству

$$\left(|x|+|y|\right)^2\le 4\pi^2 \Leftrightarrow |x|+|y|\le 2\pi.$$

На координатной плоскости оно задает квадрат (с внутренностью) с вершинами в точках $(0;2\pi)$, $(2\pi;0)$, $(0;-2\pi)$, $(-2\pi;0)$.

Пересекая фигуры, задаваемые первым и вторым неравенствами системы, мы получим квадрат, из которого вырезан единичный круг в центре и по четверти круга единичного радиуса слева и справа. Эта фигура изображена на рис. 3.6.

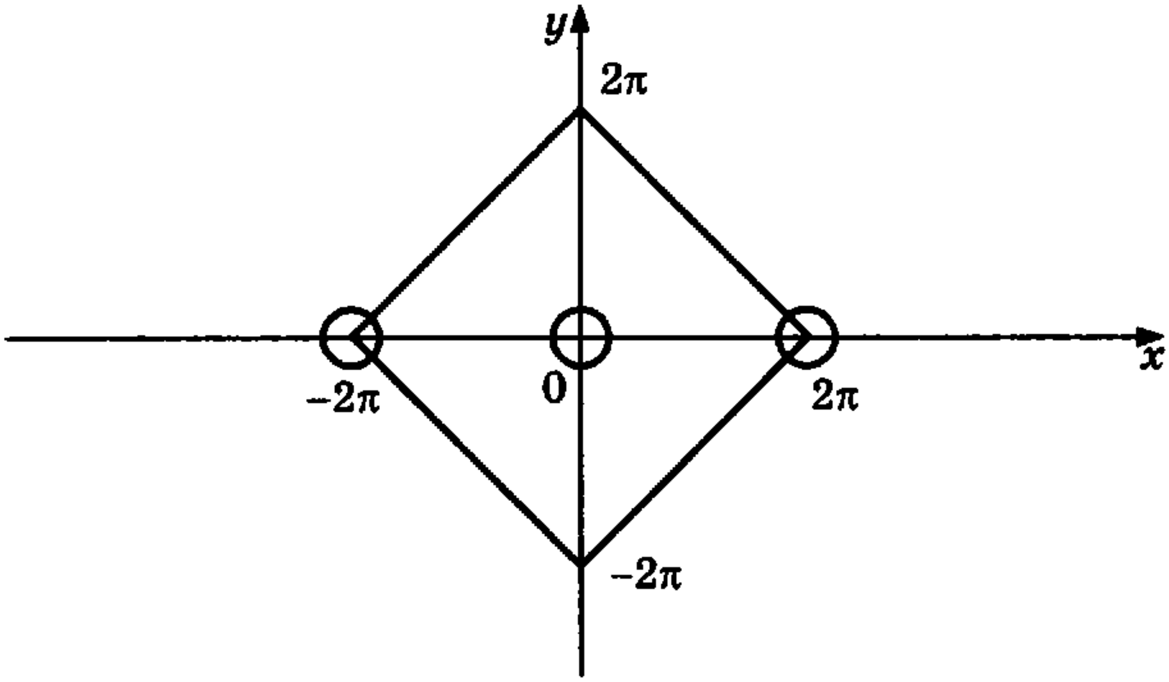


Рис. 3.6

Площадь квадрата равна $8\pi^2$, а площадь вырезанной фигуры равна $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $S = 8\pi^2 - \frac{3\pi}{2}$.

3.3. Уравнения

Задача 3.22 (ФГУ, 2001, июль, № 6) *Решите уравнение*

$$\arccos\left(\frac{1}{2} + \cos\left(\pi \cdot \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7}\right)\right) - \frac{2\pi}{3} = 0.$$

Решение задачи 3.22. Определение числа $\arccos a$ означает, что равенство $x = \arccos a$ равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = a, \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Разрешая исходное уравнение относительно arccos и применяя это преобразование, мы получим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \cos\left(\pi \cdot \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7}\right), \\ 0 \le \frac{2\pi}{3} \le \pi. \end{cases}$$

Неравенство системы является истинным числовым неравенством и поэтому дальше его можно не учитывать.

Уравнение системы приводится к виду (т.к. $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$):

$$\cos\left(\pi\cdot\frac{-x^2+2x+11}{x^2+4x+7}\right)=-1,$$

$$\Updownarrow$$

$$\pi\cdot\frac{-x^2+2x+11}{x^2+4x+7}=(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z},$$

$$\Updownarrow$$

$$(n+1)x^2+(4n+1)x+(7n-2)=0,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Строго говоря, на последнем шаге преобразований следовало бы добавить условие $x^2+4x+7\neq 0$. Однако дискриминант трехчлена x^2+4x+7 отрицателен, так что это условие выполнено при всех значениях x и поэтому его можно явно не указывать.

Уравнение

$$(n+1)x^2+(4n+1)x+(7n-2)=0,\ n\in\mathbb{Z} \qquad (3.3)$$

на самом деле является бесконечной совокупностью уравнений относительно одной неизвестной x. Появившаяся в задаче новая переменная n играет роль своеобразного «номера» уравнения из этой совокупности.

На первый взгляд все уравнения вида (3.3) являются квадратными, но это не так. Дело в том, что уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ — квадратное, если член второй степени действительно присутствует, т.е. $a\neq 0$. В нашем случае это означает, что уравнение с «номером» $n=-1$ — линейное: $-3x-9=0$. Если же «номер» уравнения (3.3) не равен -1, то это уравнение действительно является квадратным. Поэтому разобьем бесконечную совокупность (3.3) на совокупность из одного линейного уравнения $-3x - 9 = 0$ и бесконечную совокупность квадратных уравнений вида

$$(n+1)x^2 + (4n+1)x + (7n-2) = 0,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1. \quad (3.4)$$

Линейное уравнение $-3x - 9 = 0$ имеет единственный корень $x = -3$.

Рассмотрим теперь произвольное квадратное уравнение из совокупности (3.4). Его дискриминант равен $D = -12n^2 - 12n + 9 = -12\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right)$. Трехчлен $-12n^2 - 12n + 9$ неотрицателен только для двух целых чисел: $n = -1$, $n = 0$. Первое из них должно быть исключено, т.к. мы с самого начала ограничились случаем $n \neq -1$. Таким образом, из бесконечной совокупности (3.4) только уравнение, отвечающее $n = 0$, имеет непустое множество решений. Поскольку для остальных значений n соответствующие уравнения имеют пустое множество решений, они не вносят никакого вклада в множество решений совокупности. Иначе говоря, бесконечная совокупность (3.4) равносильна одному уравнению:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ или } 1.$$

Ответ: $x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$.

Задача 3.23 (эконом.(менеджмент), 1999, июль, № 4) *Решите уравнение*

$$x = \frac{1}{5}\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 5x + \cos 8x).$$

Решение задачи 3.23. Определение числа arcctg a означает, что равенство $x = \operatorname{arcctg} a$ равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Разрешая исходное уравнение относительно arcctg и применяя это преобразование, мы получим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} 5x + \cos 8x, \\ 0 < 5x < \pi. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 0, \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{5}. \end{cases}$$

Отметим, что приведение подобных членов tg $6x$ в левой и правой частях уравнения системы, вообще говоря, является равносильным преобразованием только, если мы сохраним условие существования ctg $5x$. Но в нашем случае неравенство системы влечет, что ctg $5x$ действительно существует.

Проделанные преобразования означают, что решение исходного уравнения с обратной тригонометрической функцией сводится к решению обычного тригонометрического уравнения

$$\cos 8x = 0 \qquad (3.5)$$

с последующим отбором только тех его корней, которые попадают на отрезок

$$0 < x < \frac{\pi}{5}. \qquad (3.6)$$

Множество решений уравнения (3.5) дается формулой $x = \dfrac{\pi(2n+1)}{16}$, $n \in \mathbb{Z}$. Условие (3.6) означает, что целочисленный параметр n удовлетворяет неравенству

$$0 < 2n+1 < \frac{16}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < n < \frac{11}{10},$$

откуда $n = 0$ или $n = 1$. Этим значениям n соответствуют два корня уравнения (3.5): $\dfrac{\pi}{16}, \dfrac{3\pi}{16}$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{16}$; $x_2 = \dfrac{3\pi}{16}$.

Задача 3.24 (ВМК, устный, 2004) *Решите уравнение*

$$\sin(5 \operatorname{arctg} 3x) = 1.$$

Решение задачи 3.24. Исходное уравнение равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$\operatorname{arctg}(3x) = \frac{\pi(4n+1)}{10}, \ n \in \mathbb{Z}. \qquad (3.7)$$

Уравнение вида $\operatorname{arctg} t = y$ либо не имеет корней (если $y \notin \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$), либо имеет единственный корень $t = \operatorname{tg} y$ (если $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$). Число вида $\dfrac{\pi(4n+1)}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$, лежит на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ только для $n = 0$ и $n = -1$.

Поэтому бесконечная совокупность уравнений (3.7) равносильна двум уравнениям (с «номерами» $n = 0$ и $n = -1$):

$$\operatorname{arctg}(3x)=\frac{\pi}{10}, \qquad \operatorname{arctg}(3x)=-\frac{3\pi}{10},$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$3x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}, \qquad 3x=\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{10}\right),$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}, \qquad x=-\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}.$$

Ответ: $x_1=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10},\ x=-\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}.$

Задача 3.25 (геолог., устный, 2008, июль) *Решите уравнение*

$$\sin\left(2|\arcsin x|\right)=1.$$

Решение задачи 3.25. Исходное уравнение равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$\begin{gathered}2|\arcsin x| = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\arcsin x| = \frac{4n+1}{4}\cdot\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Уравнение вида $|f| = a$ либо не имеет корней (если $a < 0$), либо имеет два корня (если $a > 0$), либо имеет один корень (если $a = 0$). Выражение $\frac{4n+1}{4}\pi$ не может быть равно 0 (если n — целое число), а положительно тогда и только тогда, когда $n \geq 0$. Поэтому бесконечная совокупность уравнений (3.8) равносильна совокупности

$$\arcsin x = \pm\frac{4n+1}{4}\pi,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.9}$$

Уравнение вида $\arcsin x = y$ либо не имеет корней (если $y \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), либо имеет единственный корень $x = \sin y$ (если $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). Число вида $\pm\frac{4n+1}{4}\pi$, $n \in \mathbb{Z}_+$, лежит на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ тогда и только тогда, когда $n = 0$. Поэтому бесконечная совокупность уравнений (3.9) равносильна двум уравнениям (соответствующим «номеру» $n = 0$):

$$\arcsin x = \pm\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 3.26 (ВМК, 1997, устный) *Решите уравнение*

$$\sin\left(\frac{\pi^2}{4}\arcsin x\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi^2}{4}\arcsin(-x)\right) = 0.$$

Решение задачи 3.26. Для новой неизвестной $t = \frac{\pi^2}{4}\arcsin x$ исходное уравнение примет вид:

$$\sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$\arcsin x = \frac{4n+1}{\pi},\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (3.10)$$

Уравнение вида $\arcsin x = y$ либо не имеет корней (если $y \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), либо имеет единственный корень $x = \sin y$ (если $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). Число вида $\frac{4n+1}{\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, лежит на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ тогда и только тогда, когда целочисленный параметр n удовлетворяет неравенству $-\frac{\pi^2}{2} \le 4n+1 \le \frac{\pi^2}{2}$. Поскольку $3 < \pi < 3{,}15$, можно гарантировать, что $4{,}5 < \frac{\pi^2}{2} < 5$. Следовательно, $n = 0$ или $n = -1$. Поэтому бесконечная совокупность уравнений (3.7) равносильна совокупности из двух уравнений (с «номерами» $n = 0$ и $n = -1$):

$$\arcsin x = \frac{1}{\pi}, \qquad \arcsin x = -\frac{3}{\pi},$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = \sin\frac{1}{\pi}, \qquad x = -\sin\frac{3}{\pi}.$$

Ответ: $x_1 = \sin\frac{1}{\pi}$; $x_2 = -\sin\frac{3}{\pi}$.

Задача 3.27 (хим., 1967, № 2) *Решите уравнение*

$$\cos^4(\operatorname{arcctg} x) + \sin^4(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{cosec}^2(\operatorname{arcctg} x).$$

Решение задачи 3.27. Введем новую неизвестную $t = \operatorname{arcctg} x$. Для нее исходное уравнение примет вид:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Понижая вдвое степени за счет удвоения аргументов, мы получим следующее уравнение для $y = \cos 2t$:

$$y^3 - y^2 + y + 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2 - 2y + 3) = 0 \Leftrightarrow y = -1.$$

Отсюда

$$\cos 2t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi(2n+1)}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi(2n+1)}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение вида $\operatorname{arcctg} x = y$ либо не имеет корней (если $y \notin (0; \pi)$), либо имеет единственный корень $x = \operatorname{ctg} y$ (если $y \in (0; \pi)$). Число вида $\dfrac{\pi(2n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, лежит на интервале $(0; \pi)$ тогда и только тогда, когда $n = 0$. Поэтому бесконечная совокупность уравнений (3.11) равносильна одному уравнению (с «номером» $n = 0$):

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$$

которое имеет единственный корень $x = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Задача 3.28 (Севастополь, 2002, июль, № 2) *Решите уравнение*

$$\operatorname{arcctg} x = \arcsin x.$$

Решение задачи 3.28. *Первый способ.* Функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $-1 \le x \le 1$ и монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$ до $\frac{\pi}{2}$ при $x = 1$. На этом множестве функция $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывает от $\frac{3\pi}{4}$ при $x = -1$ до $\frac{\pi}{4}$ при $x = 1$. Поэтому наше уравнение имеет и притом ровно один корень, который лежит на интервале $(0; 1)$.

Применяя тождество (2.14), мы получим, что исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

В силу монотонности функции $y = \arcsin t$ имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = x, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет единственный корень $x_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Нетрудно видеть, что он удовлетворяет и неравенству системы.

Второй способ. Используя алгебраическое определение числа $\operatorname{arcctg} x$, мы получим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \arcsin x = x, \\ 0 < \arcsin x < \pi. \end{cases}$$

Неравенство системы равносильно неравенству $0 < x \le 1$.

Уравнение системы с помощью тождества $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ сводится к алгебраическому уравнению

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = x,$$

которое имеет два корня $x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Условию $0 < x \le 1$ удовлетворяет только $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 3.29 (хим., 2000, заочный тур олимпиады, № 4) *Решите уравнение*

$$\arcsin(0,5 + 0,5\pi\cos x) + \arccos(0,5 + 0,5\pi\sin x) = 0,5\pi.$$

Решение задачи 3.29. С помощью тождества $\arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2}$ наше уравнение можно преобразовать к виду:

$$\arcsin(0,5 + 0,5\pi\cos x) = \arcsin(0,5 + 0,5\pi\sin x).$$

В силу монотонности функции $y = \arcsin x$ это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0,5 + 0,5\pi\cos x = 0,5 + 0,5\pi\sin x, \\ -1 \le 0,5 + 0,5\pi\sin x \le 1. \end{cases} \qquad (3.12)$$

Неравенство системы обеспечивает существование $\arcsin(0{,}5+0{,}5\pi\sin x)$ и (вместе с уравнением системы) $\arcsin(0{,}5+0{,}5\pi\cos x)$. Его легко преобразовать к виду:

$$-\frac{3}{\pi}\le\sin x\le\frac{1}{\pi}. \qquad (3.13)$$

Мы не будем решать это неравенство, а используем его для отбора корней уравнения системы.

Уравнение системы (3.12) равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = 1$, множество решений которого дается формулой $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$. Для проверки условия (3.13) разобьем эту серию на две подсерии: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ и $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$. Для всех x из первой подсерии $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это число, очевидно, больше, чем $\frac{1}{\pi}$, так что ни одно значение x из первой подсерии не является решением системы (3.12). Для всех x из второй подсерии $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это число, очевидно, удовлетворяет условию (3.13).

Ответ: $\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 3.30 (биолог., 2006, № 4) *Решите уравнение*

$$9^{\arcsin(3-2x)}+\log_3\left(2\arcsin(3-2x)\right)-3^{\arccos(9-6x)}+$$
$$+\log_{\frac{1}{3}}\arccos(9-6x)=0.$$

Решение задачи 3.30. Для новых переменных $a = 2\arcsin(3-2x)$ и $b = \arccos(9-6x)$ исходное уравнение примет вид:

$$3^a + \log_3 a = 3^b + \log_3 b. \tag{3.14}$$

Функция $f(t) = 3^t + \log_3 t$ определена при $t > 0$. На этом множестве она монотонно возрастает (как сумма двух монотонно возрастающих функций). Поэтому уравнение (3.14) равносильно системе

$$\begin{cases} a = b, \\ a > 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим систему

$$\begin{cases} 2\arcsin(3-2x) = \arccos(9-6x), \\ \arcsin(3-2x) > 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Неравенство $\arcsin(3 - 2x) > 0$ равносильно неравенству $0 < 3-2x \le 1$, т.е. неравенству $1 \le x < \frac{3}{2}$. Для этих значений неизвестной применимо тождество (2.79):

$$2\arcsin(3-2x) = \arccos\left(1-2(3-2x)^2\right) =$$

$$= \arccos(-8x^2 + 24x - 17).$$

Следовательно, система (3.15) равносильна системе

$$\begin{cases} \arccos(-8x^2 + 24x - 17) = \arccos(9-6x), \\ 1 \le x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

В силу монотонности арккосинуса последняя система равносильна системе

$$\begin{cases} -8x^2+24x-17=9-6x, \\ 1\le x<\dfrac{3}{2}, \\ -1\le 9-6x\le 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-15x+13=0, \\ \dfrac{4}{3}\le x<\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Уравнение этой системы имеет два корня: $x_1=\dfrac{15-\sqrt{17}}{8}$, $x_2=\dfrac{15+\sqrt{17}}{8}$. Условию $\dfrac{4}{3}\le x<\dfrac{3}{2}$ удовлетворяет только первый корень.

Ответ: $x=\dfrac{15-\sqrt{17}}{8}$.

Задача 3.31 (ВМК, 2001, устный) *Решите уравнение*

$$\arcsin\frac{x}{2}+2\arccos x=\pi.$$

Решение задачи 3.31. Запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

Используя тождества (2.9) и (2.86), мы получим:

$$\arcsin\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2}}=\arcsin x,$$

что в силу монотонности арксинуса равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2}}=x, \\ -1\le x\le 1. \end{cases}$$

Это уравнение системы имеет единственный корень $x = 0$, который, очевидно, удовлетворяет и неравенству системы.

Ответ: $x = 0$.

Задача 3.32 (ВМК, 1997, устный) *Решите уравнение*

$$\arcsin(-x^2+3x-1)+\sin\pi x=-\frac{\pi}{2}.$$

Решение задачи 3.32. Поскольку задача содержит разнородные члены — тригонометрический $\sin\pi x$ и «обратный тригонометрический» $\arcsin(-x^2+3x-1)$, естественно применить графический метод или метод оценок. Графический метод, конечно, предпочтительнее в силу своей наглядности и «избыточности», что позволяет вылавливать ошибки в решении.

Начнем с изучения функций $y=\arcsin(-x^2+3x-1)$ и $y=\sin\pi x$.

Первую функцию можно рассматривать как суперпозицию функций $y=\arcsin t$ и $t=-x^2+3x-1$. Она определена тогда и только тогда, когда $-1\le -x^2+3x-1\le 1$. Это двойное неравенство равносильно системе из двух квадратичных неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x\le 0, \\ x^2-3x+2\ge 0, \end{cases}$$

множество решений которой является объединением двух отрезков [0; 1] и [2; 3].

При изменении переменной x от 0 до 1 квадратичная функция $t=-x^2+3x-1$ монотонно возрастает от -1 до 1, а при изменении переменной x от 2 до 3 функция $t=-x^2+3x-1$ монотонно убывает от 1 до -1. Поскольку функция y = arcsin t монотонно возрастает, поведение функции $y=\arcsin(-x^2+3x-1)$ повторяет поведение функции $t=-x^2+3x-1$: при изменении переменной x от 0 до 1 функция $y=\arcsin(-x^2+3x-1)$ монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а при изменении переменной x от 2 до 3 монотонно убывает от $\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$. В частности, всюду на области определения верно двойное неравенство

$$-\frac{\pi}{2}\le\arcsin(-x^2+3x-1)\le\frac{\pi}{2}. \qquad (3.16)$$

Отметим, что график функции $y=\arcsin(-x^2+3x-1)$ может быть абсолютно точно нарисован.

Функция $y=\sin\pi x$ определена при всех $x\in\mathbb{R}$ и принимает значения на отрезке $[-1;\ 1]$. Однако тот факт, что левая часть исходного уравнения определена только для $x\in[0;1]\cup[2;3]$, означает, что и функцию $y=\sin\pi x$ следует рассматривать на этом множестве. Для $x\in[0;1]\cup[2;3]$ аргумент этой функции (число πx) лежит на множестве $[0;\pi]\cup[2\pi;3\pi]$. Поэтому $\sin\pi x$ меняется от 0 до 1:

$$0\le\sin\pi x\le1. \qquad (3.17)$$

Более того, нетрудно понять, что на отрезке $[0;\ 1]$ функция $f(x)=\sin\pi x$ вначале возрастает от $f(0)=0$ до $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, затем убывает от $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ до $f(1)=0$, а на отрезке $[2; 3]$ вначале возрастает от $f(2)=0$ до $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$, затем убывает от $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$ до $f(3)=0$. Значит, график функции $f(x)=\sin\pi x$ также может быть абсолютно точно нарисован.

Если бы $f(x)=\sin\pi x$ все время возрастала на каждом из двух отрезков $[0; 1]$ и $[2; 3]$, можно было бы утверждать, что и функция $y=\arcsin(-x^2+3x-1)+$ $+\sin\pi x$ возрастает. Однако это не так и поэтому относительно поведения левой части исходного уравнения нельзя сказать ничего определенного. В этой ситуации остается надеяться только на оценки (3.16), (3.17).

Из оценок (3.16), (3.17) следует, что на области определения исходного уравнения левая часть больше или равна $-\frac{\pi}{2}$, причем если хотя бы в одном из неравенств $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin(-x^2+3x-1)$, $0\le\sin\pi x$ стоит знак $<$, то левая часть исходного уравнения будет строго больше $-\frac{\pi}{2}$. Поэтому равенство между левой и правой частями исходного уравнения возможно тогда и только тогда, когда левые неравенства в оценках (3.16), (3.17) на самом деле являются равенствами. Из проведенного выше анализа следует, что это, в свою очередь, равносильно системе:

$$\begin{cases} x=0;3, \\ \sin\pi x=0. \end{cases} \Leftrightarrow\ x=0;3$$

Ответ: $x_1=0$; $x_2=3$.

Задача 3.33 (ВМК, 1998, устный) *Решите уравнение*

$$\arcsin(x^3+x^2-2)+\sqrt{6x-x^2-5}=0.$$

Решение задачи 3.33. Поскольку задача содержит разнородные члены — «обратный тригонометрический» $\arcsin(x^3+x-2)$ и иррациональный $\sqrt{6x-x^2-5}$, естественно применить графический метод или метод оценок.

Начнем с изучения более простой функции $y=\sqrt{6x-x^2-5}$. Ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y=\sqrt{t}$ и $t=-x^2+6x-5$. Она определена тогда и только тогда, когда $-x^2+6x-5\geq 0$, что равносильно двойному неравенству $1\leq x\leq 5$. При изменении переменной x от 1 до 3 квадратичная функция $t=-x^2+6x-5$ монотонно возрастает от 0 до 4, а при изменении переменной x от 3 до 5 монотонно убывает от 4 до 0. Поскольку функция $y=\sqrt{t}$ монотонно возрастает, поведение функции $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ повторяет поведение функции $t=-x^2+6x-5$: при изменении переменной x от 1 до 3 функция $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ монотонно возрастает от 0 до 2, а при изменении переменной x от 3 до 5 монотонно убывает от 2 до 0. В частности, всюду на области определения верно двойное неравенство

$$0\leq\sqrt{-x^2+6x-5}\leq 2. \tag{3.18}$$

Отметим, что график функции $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ может быть абсолютно точно нарисован.

Функция $y = \arcsin(x^3 + x - 2)$ гораздо сложнее предыдущей. Даже найти ее область определения не представляется возможным. Но, на наше счастье, функция $x^3 + x - 2$ монотонно возрастает (как сумма возрастающих функций). На отрезке $1 \le x \le 5$ (где определена функция $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$) функция $x^3 + x - 2$ меняется от 0 до 128. Для существования $\arcsin(x^3 + x - 2)$ нужно, чтобы выражение $x^3 + x - 2$ не превосходило 1. Из монотонности функции $x^3 + x - 2$ следует, что уравнение $x^3 + x - 2 = 1$ имеет единственный корень $x_0 \in [1,21; 1,22]$ (т.к. $f(1,21) = 0,981561$, $(1,22) = 1,035848$). Тогда область определения исходного уравнения — это отрезок $[1; x_0]$, причем на этом множестве функция $y = \arcsin(x^3 + x - 2)$ монотонно возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Как следует из проведенного исследования, на этом множестве возрастает и функция $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ (от 0 до $y_0 = \sqrt{-x_0^2 + 6x_0 - 5} > 0$). Значит, монотонно возрастает и сумма $\arcsin(x^3 + x^2 - 2) + \sqrt{6x - x^2 - 5}$ (от 0 до $\frac{\pi}{2} + y_0$). Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Особо отметим, что приведенное решение является «избыточным» — в этом его определенный недостаток, но одновременно и большое достоинство (не надо тратить силы на поиск «рационального» решения, ошибки в вычислениях или рассуждениях обычно приводят к нестыковке разных выводов, что позволяет находить ошибки). Его можно сократить, оставив только оценки. Именно, достаточно

1. найти область определения функции $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ — это отрезок [1; 5];

2. указать, что на этом множестве $\sqrt{-x^2+6x-5}\geq 0$;

3. указать, что на этом множестве $x^3+x-2\geq 0$;

4. указать при тех значениях $x\in[1;5]$, для которых определена функция arcsin (x^3+x-2), эта функция неотрицательна (при этом важно подчеркнуть, что такие значения переменной x существуют, например, $x = 1$);

После этого можно сделать вывод, что левая часть исходного уравнения больше или равна 0, причем равенство 0 возможно тогда и только тогда, когда одновременно $\sqrt{-x^2+6x-5}=0$ и $\arcsin(x^3+x-2)=0$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases}-x^2+6x-5=0\\ x^3+x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1;5,\\ x^3+x-2=0.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Ответ: $x = 1$.

Задача 3.34 (ВМК, 2002, устный) *Решите уравнение*

$$|x-\pi|+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=0.$$

Решение задачи 3.34. Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=-|x-\pi|$$

и будем решать его графически.

Функция $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$ периодична с периодом $T=\pi$, нечетная и при $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ совпадает с функцией $y = x$. Поэтому ее график выглядит так, как представлено на рис. 3.7. На этом же рисунке мы изобразили график функции $y=-|x-\pi|$. Чтобы можно было различить эти графики, мы немного сдвинули график функции $y=-|x-\pi|$ вниз.

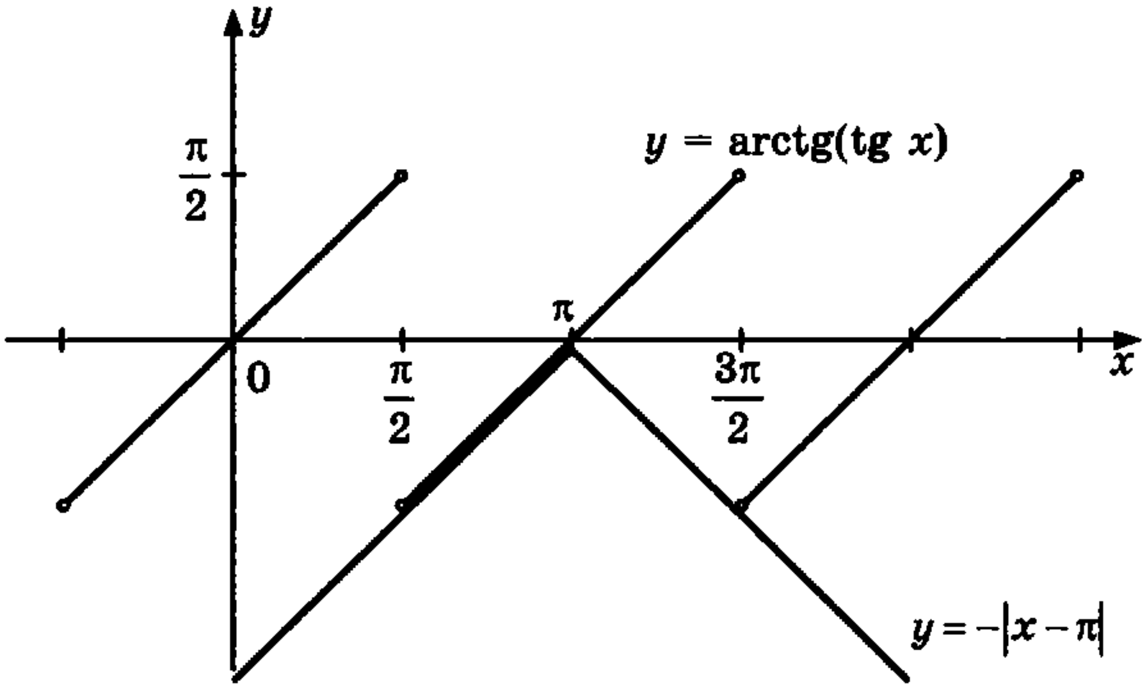


Рис. 3.7

Из рисунка ясно, что оба графика совпадают на промежутке $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$.

Задача 3.35 (Севастополь, 2003, май, № 7) *Известно, что*

$$\frac{3\arcsin^2 x}{x}+2\pi\arcsin x=\pi^2 x.$$

Найдите

$$\frac{x^2}{\arcsin^2 x-x\arcsin x}.$$

Решение задачи 3.35. В числителе и знаменателе дроби

$$\frac{x^2}{\arcsin^2 x-x\arcsin x} \tag{3.19}$$

стоят только члены второй степени относительно переменных x и $t = \arcsin x$. После умножения на x равенство

$$\frac{3\arcsin^2 x}{x} + 2\pi \arcsin x = \pi^2 x \qquad (3.20)$$

превратится в однородное уравнение. Поэтому в соответствии с общей теорией однородных многочленов преобразуем обе эти формулы так, чтобы появился блок $a = \frac{\arcsin x}{x}$. Для этого числитель и знаменатель дроби (3.19) разделим на x^2, а уравнение (3.20) — на x.

Теперь задача примет вид:

найдите $\frac{1}{a^2 - a}$, *если* $3a^2 + 2\pi a - \pi^2 = 0$.

Последнее уравнение имеет два корня: $-\pi$ и $\frac{\pi}{3}$.

Случай $a = -\pi$ означает, что $\arcsin x = -\pi x$. Из графика функции $y = \arcsin x$ ясно, что это равенство возможно только при $x = 0$. Но эта возможность исключена, т.к. тогда не определена первая дробь в равенстве (3.20).

Случай $a = \frac{\pi}{3}$ означает, что $\arcsin x = \frac{\pi}{3} x$. Из графика функции $y = \arcsin x$ ясно, что это уравнение имеет два ненулевых корня x, т.е. этот случай возможен. Теперь легко подсчитать значение дроби (3.19):

$$\frac{1}{a^2 - a} = \frac{9}{\pi^2 - 3\pi}.$$

Ответ: $\frac{9}{\pi^2 - 3\pi}$.

Задача 3.36 (геолог., 2004, устный) *Решите уравнение*

$$\arccos\left(\sqrt{3}x\right)+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Решение задачи 3.36. Функция $y=\arccos\left(\sqrt{3}x\right)+$ $+\arccos x$ определена на отрезке $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$ и на этом множестве убывает (как сумма двух убывающих функций). Поэтому наше уравнение не может иметь больше одного корня. С другой стороны, очевидно, что $x=\frac{1}{2}$ является корнем $\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}, \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

Задача 3.37 (ФНМ, 2000, апрель, № 6) *Решите уравнение*

$$x^2=\arcsin(\sin x)+10x.$$

Решение задачи 3.37. Преобразуем уравнение к виду

$$\arcsin(\sin x)=x^2-10x$$

и будем решать его графически.

График правой части — парабола с вершиной в точке (5; −25), пересекающая ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 10$.

Чтобы построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$, прежде всего отметим, что эта функция нечетная и периодическая с периодом $T=2\pi$. Поэтому достаточно построить ее график для $x\in[0;\pi]$.

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ верно тождество $\arcsin(\sin x) = x$, так что на этом отрезке графиком нашей функции будет биссектриса первого координатного угла.

На отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ верно тождество $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, так что на этом отрезке графиком нашей функции будет прямая линия, которая образует угол 45° с отрицательным направлением оси Ox и пересекает эту ось в точке $x = \pi$.

На рис. 3.8 изображены оба этих графика.

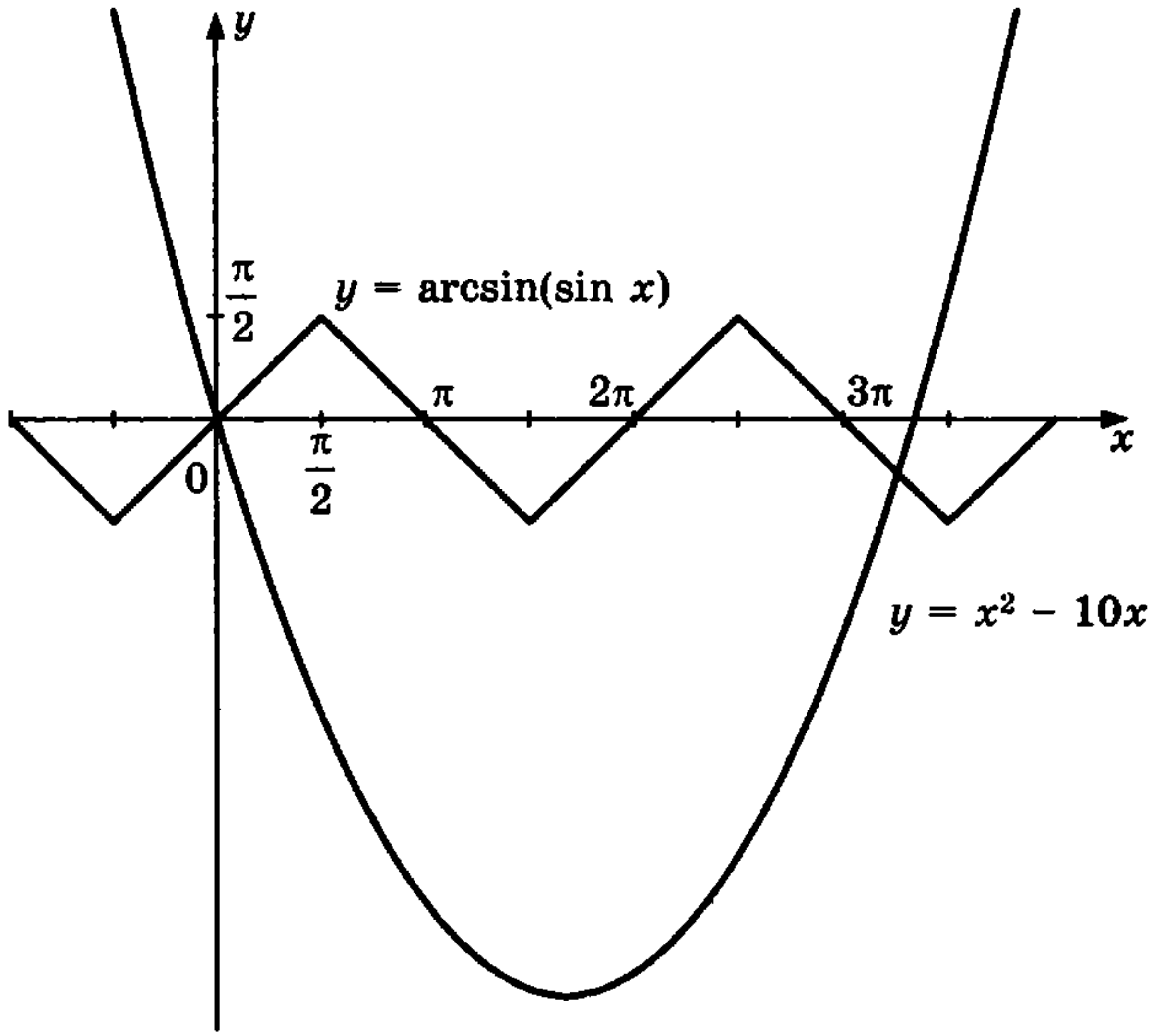


Рис. 3.8

Из этого рисунка следует, что исходное уравнение имеет два корня. Первый корень равен 0. Значение второго корня из рисунка определить нельзя, но ясно, что он лежит на интервале $\left(3\pi; \frac{7\pi}{2}\right)$, на котором график функции $y = \arcsin(\sin x)$ совпадает с прямой $y=-x+3\pi$. Поэтому второй корень нашего уравнения можно определить как больший корень уравнения $x^2-10x=-x+3\pi$ (меньший корень соответствует второй точке пересечения параболы $y=x^2-10x$ и прямой $y=x+3\pi$). Решая последнее уравнение, мы получим: $x_2=\frac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2=\frac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

Задача 3.38 (хим., 2001, май, № 4) *Решите уравнение*

$$\arcsin\frac{6x-7}{2x-1}=2\pi-\pi x.$$

Решение задачи 3.38. Будем решать уравнение графически.

Чтобы упростить задачу построения графика левой части, введем новую неизвестную $t=\frac{6x-7}{2x-1}$. Тогда $x=\frac{t-7}{2t-6}$ и наше уравнение примет вид:

$$\arcsin t=\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot\frac{1}{t-3}. \qquad (3.21)$$

На рис. 3.9 изображены графики функций $y = \arcsin t$ и $y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot \frac{1}{t-3}$.

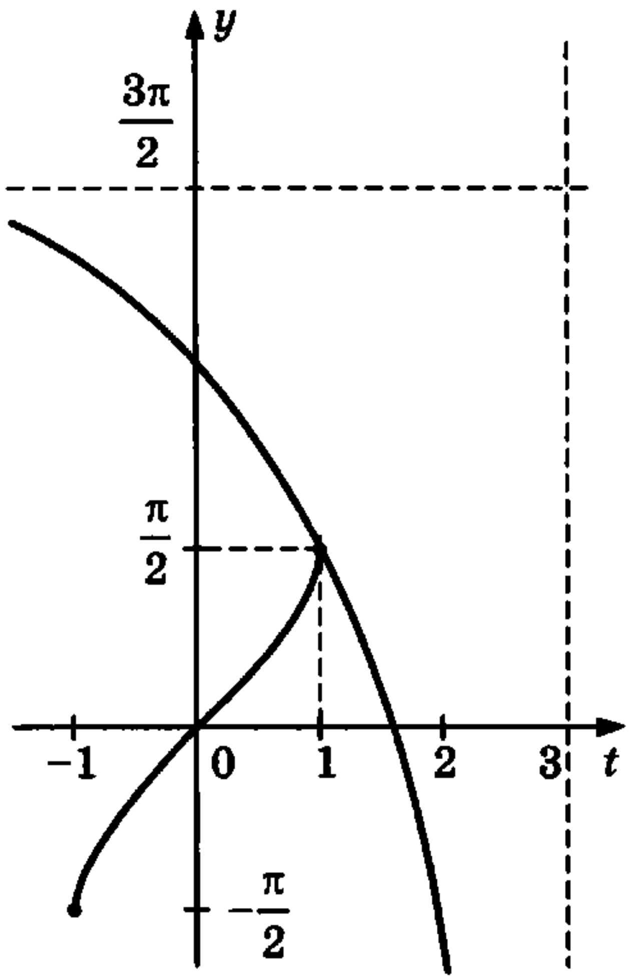


Рис. 3.9

График второй функции — гипербола с вертикальной асимптотой $t = 3$ и горизонтальной асимптотой $y = \frac{3\pi}{2}$. Поскольку уравнение (3.21) определено только для $t \in [-1; 1]$, мы не изображали вторую ветвь этой гиперболы (она соответствует $t \geq 3$). Особой точкой гиперболы является точка, соответствующая $t = 1$, т.е. границе области определения уравнения (3.21). Поэтому необходимо подсчитать значение второй функции в этой точке — оно равно $\frac{\pi}{2}$ (также естественно определить значение в точке $t = -1$ и точки пересечения гиперболы с осями координат, хотя никакой роли эти значения не сыграют). Поскольку функция $y = \arcsin t$ возрастающая, а функция $y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot \frac{1}{t-3}$ *на множестве* $[-1; 1]$ убывающая, точка $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ будет единственной точкой пересечения графиков, так что уравнение (3.21) имеет единственный корень $t = 1$. Ему соответствует $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Задача 3.39 (географ., 2001, июль, № 5) *Решите уравнение*

$$2\arcsin(3^x - 8) - 3\arccos(11^x - 120) = \frac{2\pi}{x}.$$

Решение задачи 3.39. Будем решать уравнение графически. С этой целью прежде всего найдем область определения уравнения.

Левая часть определена тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\begin{cases} -1 \le 3^x - 8 \le 1, \\ -1 \le 11^x - 120 \le 1. \end{cases}$$

Множество решений этой системы неравенств — отрезок $[x_0; 2]$, где $x_0 = \max(\log_3 7; \log_{11} 119) > 0$ (точное значение x_0 не играет никакой роли).

Для $x_0 \le x \le 2$ определена и правая часть, так что искомая область определения исходного уравнения — это отрезок $[x_0; 2]$.

На этом множестве функция $y = 2\arcsin(3^x - 8)$ монотонно возрастает как суперпозиция монотонных функций $y = 2\arcsin t$, $t = 3^x - 8$.

По той же причине возрастает и функция $y = -3\arccos(11^x - 120)$. Следовательно, левая часть исходного уравнения — возрастающая функция от x.

Правая часть на множестве $[x_0; 2]$ — убывающая функция от x. Поэтому исходное уравнение может иметь не больше одного корня. С другой стороны, нетрудно догадаться, что $x = 2$ — корень.

Ответ: 2.

Задача 3.40 (ФНМ, 2005, заочный тур олимпиады, № 2) *Найдите все решения уравнения*

$$\log_2(5 - x^2 - 4x) - 3 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{1-x}\right) =$$

$$= e^{\sqrt{4x+12}} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \cdot \arcsin\left(\frac{1-x}{x+7}\right).$$

Решение задачи 3.40. Обращая внимание на большое количество выражений, которые определены не всегда, найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} 5 - x^2 - 4x > 0, \\ \dfrac{\pi}{1-x} \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ 4x + 12 \ge 0, \\ x^2 + 2x - 3 \ge 0, \\ -1 \le \dfrac{1-x}{x+7} \le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 1, \\ x \ne \dfrac{2n-1}{2n+1}, \ n \in \mathbb{Z};\ x \ne 1, \\ x \ge -3, \\ x \le -3;\ x \ge 1, \\ x \ge -3. \end{cases}$$

Пересечением всех найденных множеств будет одноэлементное множество $\{-3\}$.

Для завершения решения достаточно простой подстановкой проверить, превращает ли $x = -3$ исходное уравнение в истинное числовое равенство.

Ответ: $x = -3$.

Задача 3.41 (ВМК, 1983, № 6) *Найдите все решения уравнения*

$$\sqrt{2-|y|}\cdot\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=$$
$$=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5}{4}\pi^2.$$

Решение задачи 3.41. Имея в виду разнородность уравнения (в нем присутствуют радикал, тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции) и наличие двух неизвестных естественно применить для его решения метод оценок.

С этой целью найдем области значений функций

$$f(y)=\sqrt{2-|y|},$$
$$g(x)=5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33},$$
$$h(x)=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5}{4}\pi^2.$$

Функция $f(y)$ определена для $y\in[-2;2]$, при этом ее область значений — это отрезок $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Функция $g(x)=5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}$ за счет понижения степени может быть приведена к виду $g(x)=-(3\sin 2x+7\cos 2x+2)+3\sqrt[3]{33}$. Поэтому ее область значений — отрезок

$$\left[-2-\sqrt{58}+3\sqrt[3]{33};-2+\sqrt{58}+3\sqrt[3]{33}\right].$$

Число $-2-\sqrt{58}+3\sqrt[3]{33}$ положительно (оно примерно равно 0,0058). Поэтому область значений левой части уравнений — отрезок

$$\left[0;\sqrt{2}\left(-2+\sqrt{58}+3\sqrt[3]{33}\right)\right].$$

Функция $h(x)$ может быть преобразована к виду:

$$h(x)=\arcsin^2 x+\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)^2-\frac{5}{4}\pi^2.$$

Ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y=2t^2-\pi t-\pi^2$ и $t=\arcsin x$. Поэтому область значений правой части совпадает с областью значений функции $y=2t^2-\pi t-\pi^2$ на множестве $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$. Вершина параболы $y=2t^2-\pi t-\pi^2$ имеет координаты $t_0=\frac{\pi}{4}$, $y_0=-\frac{9\pi^2}{8}$, а значения в точках $t=-\frac{\pi}{2}$ и $t=\frac{\pi}{2}$ равны 0 и $-\pi^2$ соответственно. Поэтому искомая область значений равна $\left[-\frac{9\pi^2}{8};0\right]$.

Поскольку левая часть больше или равна 0, а правая часть меньше или равна 0, равенство между ними возможно тогда и только тогда, когда они порознь равны 0. Для левой части это равносильно тому, что $|y|=2$ (т.к. $g(x)>0$ при всех x), а для правой — тому, что

$$t=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\arcsin x=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: $(-1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$.

3.4. Системы уравнений

Задача 3.42 (ИСАА, 2002, июль, № 6) *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \arccos 3x + \arcsin 2y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \arcsin 3x \cdot \arccos 2y = \dfrac{5\pi}{64}. \end{cases}$$

Для каждого решения $(x;\, y)$ *определите, какое из чисел больше:* $3x - 2y$ *или* $\sqrt[4]{2} - 0{,}5$.

Решение задачи 3.42. С помощью тождества $\arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2}$ систему можно привести к виду:

$$\begin{cases} \arcsin 3x - \arcsin 2y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \arcsin 3x \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin 2y\right) = \dfrac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

Для новых неизвестных

$$a = \arcsin 3x,$$

$$b = \arcsin 2y$$

эта система примет вид

$$\begin{cases} a - b = \dfrac{\pi}{4}, \\ a \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - b\right) = \dfrac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

Она имеет два решения

$$\begin{cases} a = \dfrac{\pi}{8}, \\ b = -\dfrac{\pi}{8}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{5\pi}{8}, \\ b = \dfrac{3\pi}{8}. \end{cases}$$

Соответственно, исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} \arcsin 3x = \dfrac{\pi}{8}, \\ \arcsin 2y = -\dfrac{\pi}{8}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \arcsin 3x = \dfrac{5\pi}{8}, \\ \arcsin 2y = \dfrac{3\pi}{8}. \end{cases}$$

Поскольку $\arcsin 3x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, а $\dfrac{5\pi}{8} > \dfrac{\pi}{2}$, вторая система не имеет решений. Первая система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{\pi}{8}, \\ y = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Значение $\sin\dfrac{\pi}{8}$ легко подсчитать:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}.$$

Поэтому для найденного решения число $3x - 2y$ равно $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Стандартными преобразованиями легко показать, что оно больше, чем $\sqrt[4]{2}-0,5$:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} > \sqrt[4]{2}-0,5,$$

$$\Updownarrow$$

$$2-\sqrt{2} > \sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+\frac{1}{4},$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt[4]{2} > 2\sqrt{2}-\frac{7}{4},$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{2} > 8-7\sqrt{2}+\frac{49}{16},$$

$$\Updownarrow$$

$$128\sqrt{2} > 177,$$

$$\Updownarrow$$

$$32768 > 31329.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6};\ -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше.

Задача 3.43 (ВМК (отд. бакалавров), 2005, июль, № 4) *Найдите все решения системы уравнений*

$$\begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{x+y}{5}\right) = \arcsin\left(\dfrac{3(x^2+y^2)}{125}\right), \\ xy = -7. \end{cases}$$

Решение задачи 3.43. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}=\dfrac{3(x^2+y^2)}{125}, \\ xy=-7, \\ -1\le\dfrac{x+y}{5}\le 1. \end{cases}$$

Эта система симметрична относительно неизвестных x и y. Поэтому для ее решения введем новые неизвестные $a = x + y$, $b = xy$:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{5}=\dfrac{3(a^2-2b)}{125}, \\ b=-7, \\ -5\le a\le 5. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$\begin{cases} a=\dfrac{7}{3}, \\ b=-7. \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным, мы получим систему

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{7}{3}, \\ xy=-7, \end{cases}$$

которая легко решается методом исключения.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{7-\sqrt{301}}{6},\dfrac{7+\sqrt{301}}{6}\right),\left(\dfrac{7+\sqrt{301}}{6},\dfrac{7-\sqrt{301}}{6}\right)\right\}$.

Задача 3.44 (геолог., 2004, устный) *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}\cos x - \arccos y = 1,\\ \cos \pi y - \arcsin x = -1.\end{cases}$$

Решение задачи 3.44. Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\arccos y = -(1 - \cos x).$$

Левая часть этого больше или равна 0, а правая меньше или равна 0. Поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases}\arccos y = 0,\\ \cos x = 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 1,\\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

Второе уравнение можно не решать и не упрощать, а использовать для проверки найденных решений первого уравнения.

Поскольку из серии $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ только $x = 0$ входит в область определения выражения $\arcsin x$, достаточно проверять только пару $(x;\ y) = (0;\ 1)$ — она, очевидно, удовлетворяет второму уравнению.

Ответ: $(0;\ 1)$.

3.5. Неравенства

Задача 3.45 (мех-мат., 2003, март (тест перед олимпиадой), № 5) *Решите неравенство*

$$\arccos(4x - 4) > \arccos(-x).$$

Решение задачи 3.45. Поскольку функция $y = \arccos x$ монотонно убывает, исходное неравенство влечет, что $4x - 4 < x$. Для обратимости этого преобразования необходимо сохранить условия $-1 \le 4x - 4 \le 1$, $-1 \le -x \le 1$, гарантирующие существование $\arccos(4x - 4)$ и $\arccos(-x)$. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4x - 4 < -x, \\ -1 \le 4x - 4 \le 1, \\ -1 \le -x \le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{3}{4} \le x \le \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} \le x < \dfrac{4}{5}, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{3}{4} \le x < \dfrac{4}{5}$.

Задача 3.46 (биолог., 2008, № 3) *Решите неравенство*

$$\arccos 3x \le \arccos\sqrt{6 - 15x}.$$

Решение задачи 3.46. Начиная решение так же, как и решение задачи 3.45, мы получим систему

$$\begin{cases} 3x \ge \sqrt{6 - 15x}, \\ 3x \le 1, \\ \sqrt{6 - 15x} \ge -1. \end{cases} \tag{3.22}$$

Первое неравенство системы (3.22) легко решается возведением в квадрат; оно равносильно системе

$$\begin{cases} 9x^2 \ge 6 - 15x, \\ 6 - 15x \ge 0, \\ 3x \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{5}.$$

Множество решений второго неравенства системы (3.22) — луч $x \le \frac{1}{3}$.

Третье неравенство системы (3.22) выполнено автоматически, если только существует выражение $\sqrt{6-15x}$, т.е. оно равносильно неравенству $6-15x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{2}{5}$.

Пересечение множеств решений всех трех неравенств системы (3.22) состоит из одной точки $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Задача 3.47 (Московская математическая олимпиада, 1963, 11 класс)

Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi$. Докажите, что сумма этих чисел больше их произведения.

Решение задачи 3.47. Поскольку $x, y \in (0; +\infty)$, сумму $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} y$ можно преобразовать с помощью тождества (2.94):

$$\operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y} + \operatorname{arctg} z < \pi.$$

Применяя тождество (2.10), мы получим:

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1-xy}{x+y} + \operatorname{arctg} z < \pi,$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{1-xy}{x+y} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z,$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{1-xy}{x+y} < \operatorname{arcctg} z.$$

И, наконец, нечетность арктангенса и тождество (2.18) дадут:

$$\operatorname{arctg}\frac{xy-1}{x+y} < \operatorname{arctg}\frac{1}{z}.$$

В силу монотонности арктангенса, последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{xy-1}{x+y} < \frac{1}{z}.$$

Положительность величин x, y, z позволяет легко избавиться от дробей и получить требуемый результат:

$$(xy-1)z < x+y \Leftrightarrow xyz < x+y+z.$$

Задача 3.48 (ВМК, устный, 2008, июль) *Решите неравенство*

$$\arcsin^4(2x) \geq \arccos^4(2x).$$

Решение задачи 3.48. Используя тождество $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, преобразуем исходное неравенство к виду:

$$\arcsin^4(2x) \geq \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(2x)\right)^4.$$

После введения новой неизвестной $t = \arcsin(2x)$ мы получим алгебраическое неравенство:

$$t^4 \geq \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^4 \Leftrightarrow t^2 \geq \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2,$$

множество решений которого имеет вид: $t \geq \frac{\pi}{4}$.

Теперь вернемся к основной неизвестной x:

$$\arcsin(2x) \geq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 2x \geq \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Задача 3.49 (филолог., 2002, июль, № 4) *Решите неравенство*

$$\frac{\log_{x^6} \pi \cdot \arcsin\frac{x}{2}}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{x}} \geq 0. \qquad (3.23)$$

Решение задачи 3.49. С помощью тождества $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ приведем исходное неравенство к виду

$$\frac{\log_{x^6} \pi \cdot \arcsin\frac{x}{2}}{\cos x \cdot \sqrt{x}} \leq 0.$$

Имея в виду «смесь» из различных функций в левой части неравенства, а также то, что фактически в задаче речь идет о знаке левой части, изучим распределение знаков этих функций.

Прежде всего найдем их общую область определения:

$$\begin{cases} x^6 \neq 0; 1, \\ -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1, \\ x > 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \ 0 < x < 1, \ \ 1 < x < \frac{\pi}{2}, \ \ \frac{\pi}{2} < x \leq 2$$

На множестве $(0;1)\cup\left(1;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};2\right]$ функции $y=\sqrt{x}$ и $\arcsin\frac{x}{2}$ положительны и на знак левой части не влияют. Поэтому исходное неравенство равносильно более простому неравенству

$$\frac{\log_{x^6}\pi}{\cos x}<0.$$

Далее, на множестве (0; 1) выражение cos x положительно, а выражение $\log_{x^6}\pi$ отрицательно (т.к. основание логарифма меньше 1, а число, от которого берется логарифм, больше 1). Поэтому для всех $x\in(0;1)$ неравенство (3.23) выполнено.

На множестве $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ выражение cos x положительно. Выражение $\log_{x^6}\pi$ также положительно, т.к. и основание логарифма, и число, от которого берется логарифм, больше 1. Поэтому неравенство (3.23) не выполнено ни для одного $x\in\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

На множестве $\left(\frac{\pi}{2};2\right]$ выражение cos x отрицательно, а выражение $\log_{x^6}\pi$ положительно. Поэтому для всех $x\in\left(\frac{\pi}{2};2\right]$ неравенство (3.23) выполнено.

Ответ: $(0;1)\cup\left(\frac{\pi}{2};2\right]$.

Задача 3.50 (ВМК, 2002, июль, № 2) *Решите неравенство*

$$2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) \le 0.$$

Решение задачи 3.50. С помощью тождеств

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

исходное неравенство можно переписать в виде:

$$2\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

Чтобы избавиться от радикалов, возведем это неравенство в квадрат (второе неравенство системы гарантирует равносильность этого преобразования):

$$\begin{cases} 4(1-x^2) \le \dfrac{1-x}{2}, \\ 1-x^2 \ge 0. \end{cases}$$

Эта система из двух квадратичных неравенств легко решается:

$$\begin{cases} 8x^2 - x - 7 \ge 0, \\ x^2 \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \text{ или } x \le -\dfrac{7}{8}, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x \le -\frac{7}{8} \quad \text{или} \quad x = 1.$$

Ответ: $\left[-1; -\frac{7}{8}\right] \cup \{1\}$.

Задача 3.51 (ФНМ, 2004, заочный тур олимпиады-2004, № 4) *Найдите все решения системы неравенств:*

$$\begin{cases} \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{5}x \geq \arcsin\dfrac{x+3}{5}, \\ \dfrac{19-7x}{2x-1} > \sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3} + 3^{\frac{\lg(9x)}{\lg 3}}. \end{cases}$$

Решение задачи 3.51. Второе неравенство явно проще первого. Поэтому вначале решим его. Прежде всего произведем упрощения в правой части:

$$\begin{cases} \dfrac{19-7x}{2x-1} > 1+9x, \\ x > 0. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств легко решается методом интервалов:

$$\frac{19-7x}{2x-1} > 1+9x,$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\left(x+\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)}{x-\dfrac{1}{2}} < 0,$$

$$\Updownarrow$$

$$x < -\frac{\sqrt{10}}{3} \text{ или } \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

С учетом второго неравенства мы получим, что множество решений второго неравенства исходной системы — это интервал $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Для $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ аргументы обеих обратных тригонометрических функций из первого неравенства лежат на отрезке [0; 1]. Поэтому числа $\alpha = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{5}x$, $\beta = \arcsin\frac{x+3}{5}$ лежат на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, где синус монотонно возрастает. Поэтому для $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ первое неравенство системы равносильно неравенству

$$\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{5}x\right) \ge \sin\left(\arcsin\frac{x+3}{5}\right),$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{1-\frac{8}{25}x^2} \ge \frac{x+3}{5},$$

$$\Updownarrow$$

$$1-\frac{8}{25}x^2 \ge \frac{(x+3)^2}{25},$$

$$\Updownarrow$$

$$9x^2+6x-16 \le 0.$$

Множество решений квадратичного неравенства $9x^2+6x-16 \le 0$ — это отрезок $\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{3}; \frac{-1+\sqrt{17}}{3}\right]$.

Поскольку $\frac{-1+\sqrt{17}}{3} < \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\frac{-1-\sqrt{17}}{3} < 0 < \frac{1}{2}$, множество решений исходной системы — промежуток $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{3}\right]$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{3}\right]$.

Задача 3.52 (ВМК, 1996, июль, № 4) *Решите неравенство*

$$\arccos(3x)+\arcsin(x+1)\le\frac{7\pi}{6}.$$

Решение задачи 3.52. Перепишем исходное неравенство в виде

$$\arccos(3x)\le\frac{7\pi}{6}-\arcsin(x+1).$$

Из графика функции $y = \arccos t$ ясно, что неравенство $\arccos t\le A$ равносильно совокупности из двух систем:

$$\begin{cases}A>\pi,\\-1\le t\le 1,\end{cases}\qquad\begin{cases}0\le A\le\pi,\\\cos A\le t\le 1.\end{cases}$$

В нашем случае это означает, что исходное неравенство распадается на две системы

$$\begin{cases}\dfrac{7\pi}{6}-\arcsin(x+1)>\pi,\\-1\le 3x\le 1,\end{cases}\qquad\begin{cases}0\le\dfrac{7\pi}{6}-\arcsin(x+1)\le\pi,\\\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}-\arcsin(x+1)\right)\le 3x,\\3x\le 1.\end{cases}$$

Первое неравенство первой системы равносильно неравенству

$$\arcsin(x+1)<\frac{\pi}{6},$$
$$\Updownarrow$$
$$-1\le x+1<\frac{1}{2},$$
$$\Updownarrow$$
$$-2\le x<-\frac{1}{2}.$$

Множество решений второго неравенства первой системы — отрезок $-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}$. Он не пересекается с промежутком $-2\le x<-\frac{1}{2}$, так что множество решений первой системы пусто.

Первое неравенство второй системы равносильно неравенству

$$\frac{\pi}{6}\le\arcsin(x+1)\le\frac{7\pi}{6},$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin\frac{\pi}{6}\le x+1\le 1,$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{1}{2}\le x\le 0.$$

Для $-\frac{1}{2}\le x\le 0$ третье неравенство второй системы ($3x\le 1$) выполнено автоматически и поэтому его можно не учитывать.

Второе неравенство второй системы равносильно неравенству

$$\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\cos\left(\arcsin(x+1)\right)+\sin\frac{7\pi}{6}\cdot\sin\left(\arcsin(x+1)\right)\le 3x,$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot(x+1)\le 3x,$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{-3x^2-6x}\ge -7x-1.$$

Последнее неравенство является стандартным иррациональным неравенством. Его решение имеет вид: $\left[-\frac{5+2\sqrt{3}}{26};0\right]$.

Пересекая это множество с множеством решений первого неравенства второй системы $\left(-\frac{1}{2}\le x\le 0\right)$, мы получим ответ задачи.

Ответ: $\left[-\frac{5+2\sqrt{3}}{26};0\right]$.

Задача 3.53 (ВМК, 1997, устный) *Решите неравенство*

$$x\arcsin(\pi x)\le\frac{1}{12}.$$

Решение задачи 3.53. Будем решать неравенство графически.

Функция $f(x)=x\arcsin(\pi x)$ определена при $x\in\left[-\frac{1}{\pi};\frac{1}{\pi}\right]$ и является четной:

$$f(-x)=(-x)\cdot\arcsin\left(\pi(-x)\right)=(-x)\cdot\left(-\arcsin(\pi x)\right)=f(x).$$

При $x \in \left[0; \frac{1}{\pi}\right]$ эта функция монотонно возрастает от $f(0)=0$ до $f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{2}$ (как произведение двух неотрицательных возрастающих функций $y = x$ и $y = \arcsin(\pi x)$).

Поэтому ее график выглядит так, как показано на рис. 3.10. Из этого рисунка ясно, что решение нашего неравенства имеет вид $[-x_0; x_0]$, где x_0 — положительный корень соответствующего уравнения. Нетрудно догадаться, что $x_0 = \frac{1}{2\pi}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2\pi}; \frac{1}{2\pi}\right]$.

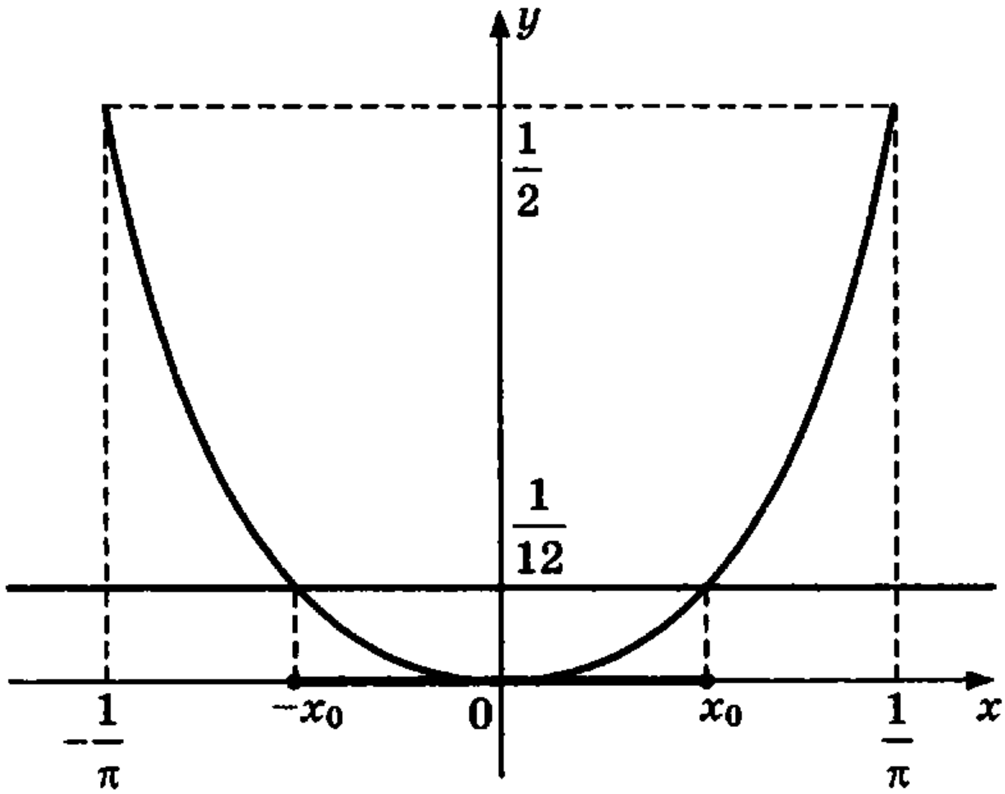


Рис. 3.10

Задача 3.54 (ВМК, 2003, апрель, № 6) *Решите неравенство*

$$\arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x) \leq x - 5.$$

Решение задачи 3.54. Будем решать неравенство графически. Чтобы нарисовать график функции

$$f(x)=\arcsin(\sin x)+2\arccos(\cos x),$$

отметим, что она является периодической с периодом $T=2\pi$.

Поэтому достаточно нарисовать ее график при $x\in[0;2\pi]$.

Если $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x)=x$, $\arccos(\cos x)=x$, так что на этом отрезке наша функция совпадает с линейной функцией $y=3x$.

Если $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, то $\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(\pi-x))=$ $=\pi-x$ (т.к. число $\pi-x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$), $\arccos(\cos x)=x$, так что на этом отрезке наша функция совпадает с линейной функцией $y=x+\pi$.

Если $x\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(\pi-x))=$ $=\pi-x$ (т.к. число $\pi-x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, $\arccos(\cos x)=$ $=\arccos(\cos(2\pi-x))=2\pi-x$ (т.к. число $2\pi-x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$), так что на этом отрезке наша функция совпадает с линейной функцией $y=-3x+5\pi$.

И наконец, если $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$, то $\arcsin(\sin x)=$ $=\arcsin(\sin(x-2\pi))=x-2\pi$ (т.к. число $x-2\pi\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$),

$\arccos(\cos x) = \arccos\left(\cos(2\pi - x)\right) = 2\pi - x$ (т.к. число $2\pi - x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$), так что на этом отрезке наша функция совпадает с линейной функцией $y = -x + 2\pi$.

На рис. 3.11 изображены графики функций $f(x) = \arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x)$ и $g(x) = x - 5$.

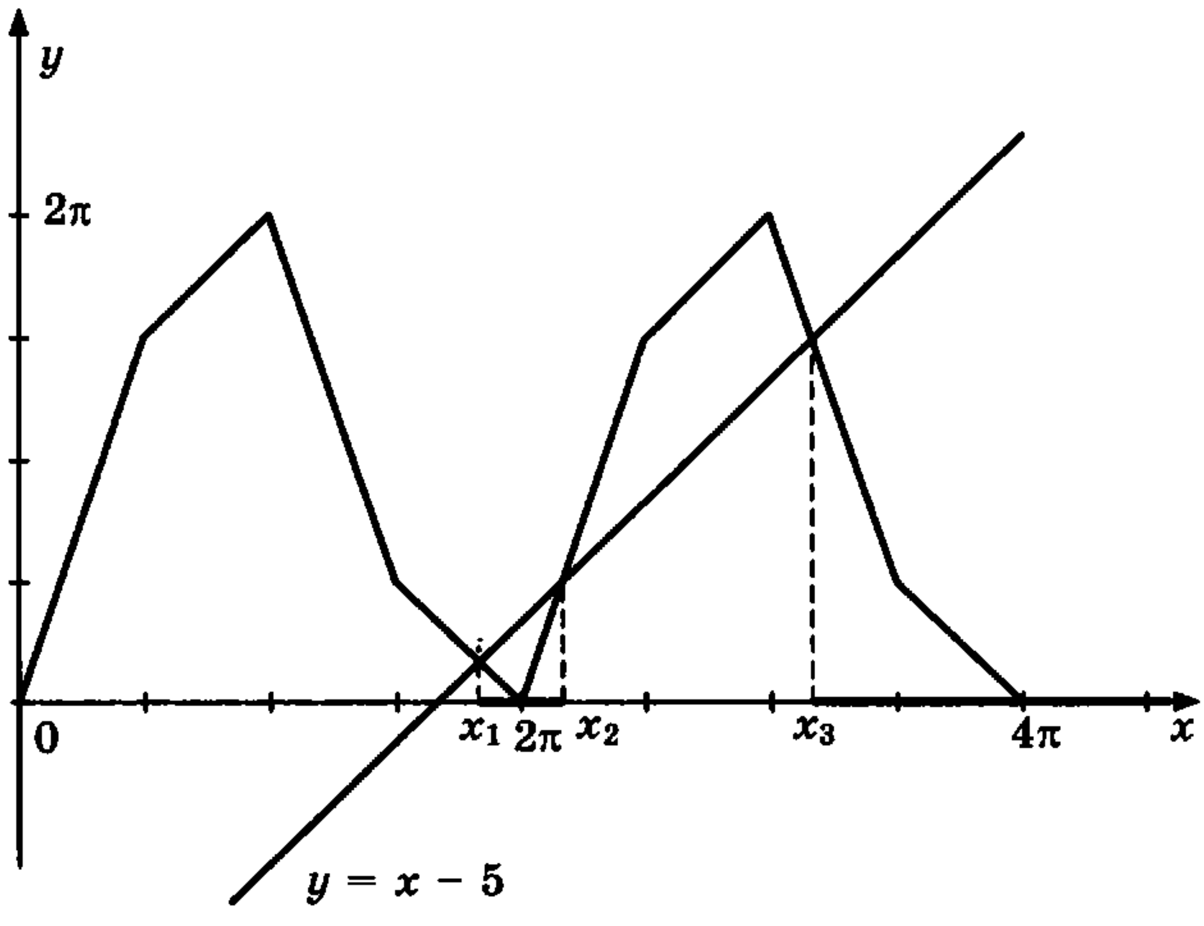


Рис. 3.11

Этот рисунок непосредственно дает множество решений исходного неравенства (в геометрической форме): оно состоит из отрезка $[x_1; x_2]$ и луча $[x_3; +\infty)$.

Чтобы записать этот ответ в алгебраическом виде, нужно найти точки x_1, x_2, x_3.

Точка x_1 может быть найдена как абсцисса точки пересечения прямых $y=-x+2\pi$ и $y=x-5$; она равна $x_1=\pi+\dfrac{5}{2}$.

Точка x_2 может быть найдена как абсцисса точки пересечения прямых $y=3(x-2\pi)$ (сдвинутой на 2π вправо прямой $y = 3x$) и $y = x - 5$; она равна $x_2=3\pi-\dfrac{5}{2}$.

Точка x_3 может быть найдена как абсцисса точки пересечения прямых $y=-3(x-2\pi)+5\pi$ (сдвинутой на 2π вправо прямой $y=-3x+5\pi$) и $y = x - 5$; она равна $x_3=\dfrac{11\pi+5}{4}$.

Ответ: $\left[\pi+\dfrac{5}{2};3\pi-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{11\pi+5}{4};+\infty\right)$.

Задача 3.55 (мех-мат. ф-т, 1995, май, № 6) *Пусть x_1 — наибольший отрицательный корень уравнения*

$$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1,$$

а x_2 — *наименьший положительный корень уравнения*

$$2\cos^2 x - 2\sin^2 x = a.$$

Найдите все значения a, при каждом из которых

$$|x_1|\le x_2.$$

Решение задачи 3.55. Эта задача связана с еще одним определением числа $A = \arccos a$. В классической теории $\arccos a$ возникает при решении уравнения $\cos x = a$ графическим методом: корни уравнения

$\cos x = a$ — это проекции на ось Ox точек пересечения графиков $y = \cos x$ и $y = a$. «Центральный» корень, т.е. корень, который получается от пересечения с «центральной» дугой косинусоиды (соответствующей $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) и называется $\arccos a$. Из рис. 3.12 ясно, что при $a \notin [-1; 1]$ уравнение $\cos x = a$ вообще не имеет корней, а при величине $a \in [-1; 1]$ величина $\arccos a$ определена однозначно. Из этого же рисунка видно, что при $-1 \le a < 1$ число $\arccos a$ является наименьшим положительным корнем уравнения $\cos x = a$. Наименьшим положительным корнем уравнения $\cos x = 1$ (случай $a = 1$) будет число 2π, в то время как $\arccos 1 = 0$.

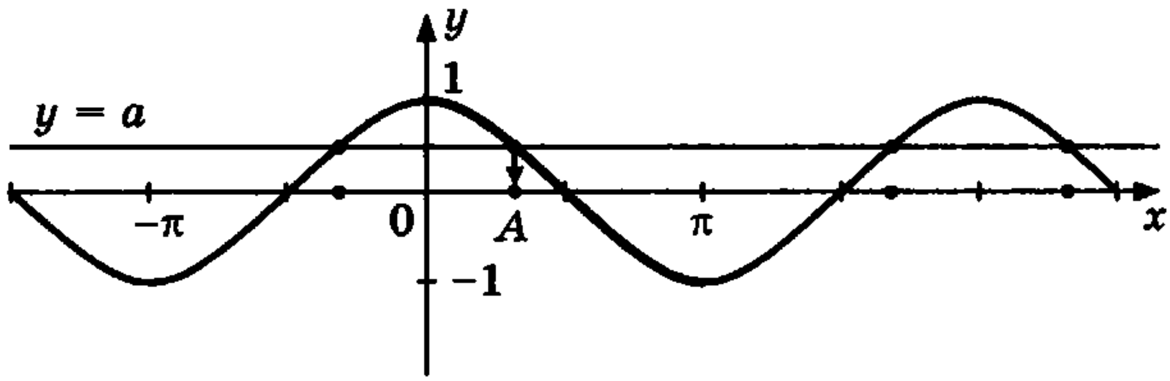


Рис. 3.12

Обозначим наименьший положительный корень уравнения $\cos x = a$ через $\varphi(a)$. Проведенные рассуждения означают, что для функции $\varphi(a)$ верно равенство:

$$\varphi(a) = \begin{cases} \arccos a, \text{если } -1 \le a < 1, \\ 2\pi, \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Отметим, что функция $\varphi(a)$ разрывна в точке $a = 1$.

Теперь введем немного более сложную функцию, чем $\varphi(a)$. Именно, обозначим наименьший корень уравнения $\cos x = a$ на луче $(t, +\infty)$ через $\varphi(a;t)$ (так что, в частности, $\varphi(a)=\varphi(a;0)$). Формально это определение можно записать следующим образом:

$$A=\varphi(a;t),$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}\cos A = a,\\ A>t,\\ \cos x = a, x>t \Rightarrow x \geq A.\end{cases}$$

Из этого определения легко получить следующее свойство функции $\varphi(a;t)$:

$$\varphi(a;t+2\pi)=\varphi(a;t)+2\pi. \qquad (3.24)$$

Действительно, пусть $A=\varphi(a;t)$. Докажем, что число $A+2\pi$ удовлетворяет трем свойствам, которые определяют число $A_1=\varphi(a;t+2\pi)$.

1. $\cos(A+2\pi)=\cos A = a$.
2. Поскольку $A > t$, верно неравенство $A+2\pi > t+2\pi$.
3. Пусть $\cos x = a$, $x>t+2\pi$. Тогда для числа $x'=x-2\pi$ выполнены соотношения: $\cos x' = a$, $x'>t$. Значит, $x' \geq A$, а тогда $x \geq A+2\pi$.

Подобным же образом можно доказать справедливость еще одного интересного тождества:

$$\varphi(a;t+\pi)=\varphi(-a;t)+\pi. \qquad (3.25)$$

Равенства (3.24) и (3.25) означают, что достаточно знать зависимость функции $\varphi(a;t)$ от t только для $t\in[0;\pi)$.

Рассматривая корни уравнения $\cos x = a$ как проекции на ось Ox точек пересечения графиков $y = \cos x$ и $y = a$, нетрудно видеть, что для $t \in [0; \pi)$ верно равенство:

$$\varphi(a;t) = \begin{cases} \arccos a, \text{если } -1 \le a < \cos t, \\ 2\pi - \arccos a, \text{если } \cos t \le a \le 1. \end{cases} \qquad (3.26)$$

Введем теперь число $\psi(a)$ как наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x = a$. Формально это определение можно записать следующим образом:

$$B = \psi(a),$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \cos B = a, \\ B < 0, \\ \cos x = a, x < 0 \Rightarrow x \le B. \end{cases}$$

Рассмотрим число $A = -B \equiv -\psi(a)$. Тогда

1. $\cos A = \cos(-B) = a$, т.е число A является корнем уравнения $\cos x = a$.
2. Кроме того, $A > 0$ (т.к. $B < 0$), т.е. A — положительный корень этого уравнения.
3. Если $x > 0$ — какой-то положительный корень уравнения $\cos x = a$, то $-x$ будет отрицательным корнем этого же уравнения. Тогда $-x \le B$ (ведь B — наибольший отрицательный корень), что равносильно $x \ge A$.

Это означает, что A — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = a$, т.е. $A = \varphi(a)$. Таким образом, функции $\psi(a)$ и $\varphi(a)$ связаны простым соотношением:

$$\psi(a) = -\varphi(a). \qquad (3.27)$$

Теперь введем функцию $\psi(a;t)$, аналогичную $\varphi(a;t)$. Именно, обозначим через $\psi(a;t)$ наибольший корень уравнения $\cos x = a$ на луче $(-\infty;t)$. В частности, $\psi(a)=\psi(a;0)$. Нетрудно видеть, что $\psi(a;t)=-\psi(a;-t)$ (формальное доказательство не отличается от доказательства соотношения (3.27)), так что можно ограничиться изучением функции $\psi(a;t)$.

Займемся теперь решением нашей задачи.

Левая часть первого уравнения является линейной комбинацией $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому его можно упростить с помощью дополнительного аргумента:

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1-2a}{2\sqrt{3}}.$$

Это уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда

$$-1\le\frac{1-2a}{2\sqrt{3}}\le1\Leftrightarrow-\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\le a\le\frac{2\sqrt{3}+1}{2}.$$

Отрицательным корням первого уравнения соответствуют корни уравнения

$$\cos z=\frac{1-2a}{2\sqrt{3}},$$

попадающие на луч $\left(-\infty;\frac{\pi}{6}\right)$. Поэтому

$$x_1(a)=\psi\left(\frac{1-2a}{2\sqrt{3}};\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}.$$

Во втором уравнении понизим степени за счет удвоения углов:

$$\cos 2x = \frac{a}{2}.$$

Поэтому

$$x_2(a) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{a}{2}\right).$$

Используя отрицательность числа x_1 и соотношения (3.25), (3.27), неравенство $|x_1| \le x_2$ можно записать в виде:

$$-x_1 \le x_2,$$

$$\Updownarrow$$

$$-\psi\left(\frac{1-2a}{2\sqrt{3}}; \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \le \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi\left(\frac{1-2a}{2\sqrt{3}}; -\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \le \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}; \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{5\pi}{6} \le \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{a}{2}\right).$$

С помощью равенства (3.26) функции $f(a) = \varphi\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}; \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{5\pi}{6}$ и $g(a) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$ могут быть выражены через функцию arccos(.):

$$f(a)=\begin{cases}\arccos\dfrac{2a-1}{2\sqrt{3}}-\dfrac{5\pi}{6}, \text{ если } -\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}\le a<-1,\\ \dfrac{7\pi}{6}-\arccos\dfrac{2a-1}{2\sqrt{3}}, \text{ если } -1\le a\le\dfrac{2\sqrt{3}+1}{2},\end{cases}$$

$$g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{2}, \text{ если } -2\le a<2,\\ \pi, \text{ если } a=2.\end{cases}$$

Общая область определения этих функций — это отрезок $\left[-\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}; 2\right]$. На рисунках 3.13 и 3.14 схематически изображены их графики (мы отразили только возрастание (убывание)). Из этих рисунков немедленно следует ответ задачи.

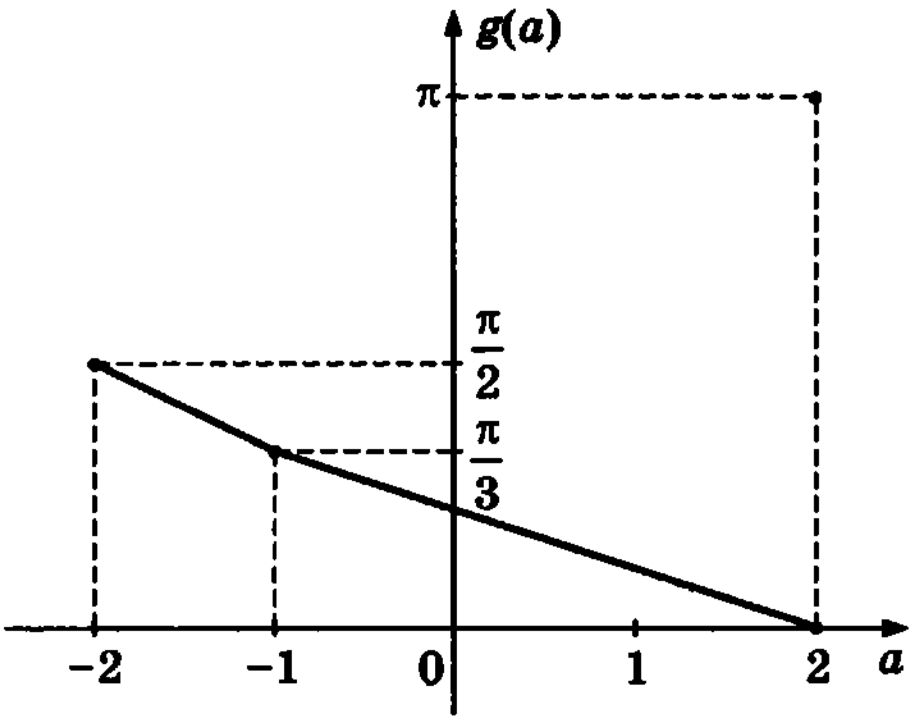


Рис. 3.13

Ответ: $\left[\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}; -1\right]\cup\{2\}$.

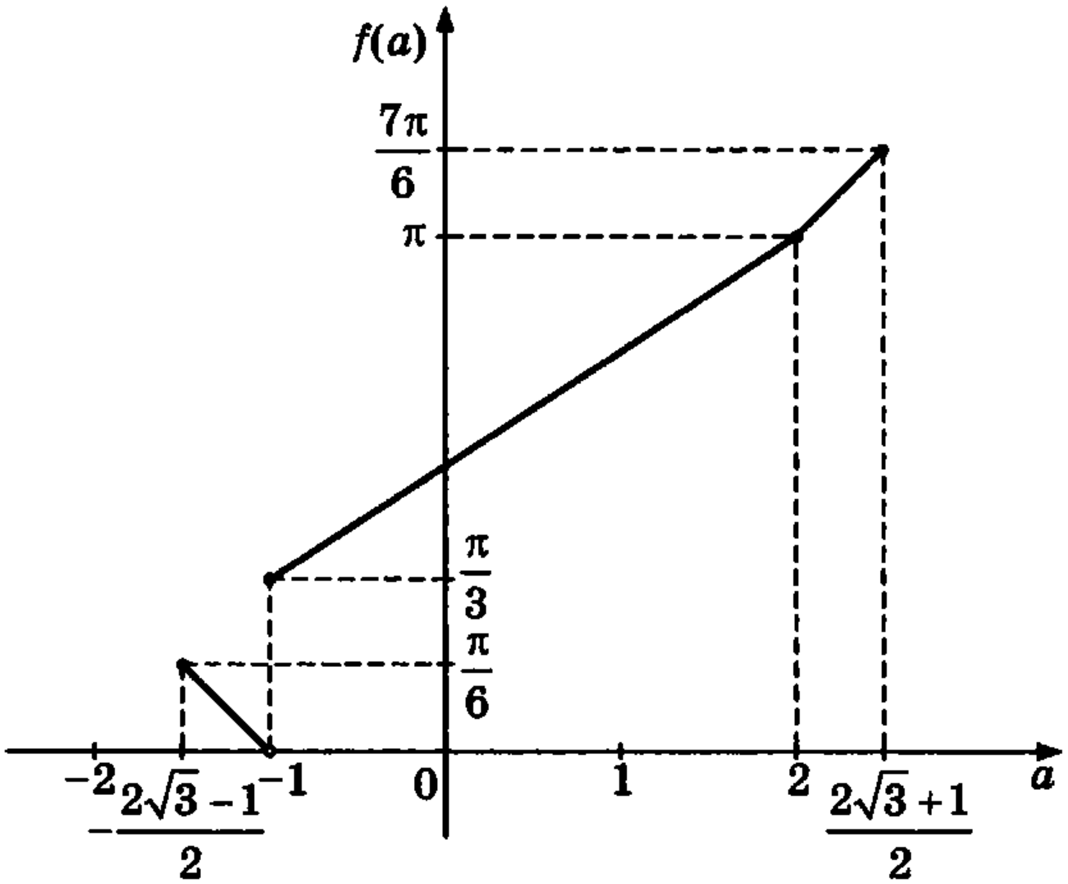


Рис. 3.14

Задача 3.56 (эконом., 2000, июль, № 7) *Про функцию $f(x)$ известно, что она определена и монотонна на множестве $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$ и удовлетворяет на этом отрезке системе*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\sin^2 f(x)}+10\cos x\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{12}{x}, \\ 0\le f(x)\le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решите неравенство $f(x)\le\dfrac{\pi}{8}$.

Решение задачи 3.56. Для решения нашей задачи прежде всего немного упростим уравнение системы.

Для этого понизим степень выражения $\sin^2 f(x)$ за счет удвоения аргумента:

$$\frac{1}{\cos(2f(x))}+5\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{6}{x},\ x\in\left[\frac{1}{5};5\right]. \qquad (3.28)$$

Если $x\in\left[\frac{1}{5};5\right]$, то $\frac{1}{x}$ также меняется на этом отрезке. Поэтому в уравнении (3.28) можно заменить x на $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}+5\cos(2f(x))=6x,\ x\in\left[\frac{1}{5};5\right]. \qquad (3.29)$$

Соотношения (3.28), (3.29) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя числовыми неизвестными $A=\cos(2f(x))$ и $B=\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$; переменная x в этом случае играет роль параметра:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{A}+5B=\dfrac{6}{x},\\ \dfrac{1}{B}+5A=6x.\end{cases}$$

Из первого уравнения можно исключить неизвестную B: $B=\frac{6A-x}{5Ax}$. Второе уравнение превратится в следующее уравнение:

$$\frac{5Ax}{6A-x}+5A=6x,$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}5A^2-6Ax+x^2=0,\\ A\neq\dfrac{x}{6}.\end{cases}$$

Первое уравнение системы можно переписать в виде $(A-x)(5A-x)=0$. Поэтому $\cos(2f(x))$ равен x или $\frac{x}{5}$.

Для $x\in(1;5]$, в силу неравенства $\cos(2f(x))\le 1$ возможно только равенство $\cos(2f(x))=\frac{x}{5}$. Отсюда, в частности, следует, что на промежутке (1; 5] функция $\cos(2f(x))$ монотонно возрастает.

По условию задачи выполнено неравенство $0\le 2f(x)\le \pi$. Поскольку на отрезке $[0;\pi]$ косинус монотонно убывает, а функция $2f(x)$ монотонна, то и функция $\cos(2f(x))$ монотонна, причем

1. если функция $f(x)$ монотонно возрастает, то функция $\cos(2f(x))$ монотонно убывает;
2. если функция $f(x)$ монотонно убывает, то функция $\cos(2f(x))$ монотонно возрастает.

Имея в виду, что на промежутке (1; 5] функция $\cos(2f(x))$ монотонно возрастает, можно гарантировать, что эта функция возрастает на всем отрезке $x\in\left[\frac{1}{5};\,5\right]$ (а функция $f(x)$ убывает на этом отрезке).

Если бы для $x=1$ было верно равенство $\cos(2f(x))=x$, то для любого числа $x\in(1;5]$ было бы верно соотношение:

$$1=\cos(2f(1))<\cos(2f(x))=\frac{x}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x>5.$$

Значит, для $x = 1$ было верно равенство $\cos(2f(x)) = \frac{x}{5}$.

Если бы хотя бы для одного значения $x \in \left[\frac{1}{5}; 1\right)$ было верно равенство $\cos(2f(x)) = x$, то было бы верно соотношение:

$$x = \cos(2f(x)) < \cos(2f(1)) = \frac{1}{5},$$

в то время как мы рассматриваем случай $x \in \left[\frac{1}{5}; 1\right)$.

Значит, для $x \in \left[\frac{1}{5}; 1\right)$ верно равенство $\cos(2f(x)) = \frac{x}{5}$.

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \cos(2f(x)) = \dfrac{x}{5} \text{ при всех } x \in \left[\dfrac{1}{5}; 5\right], \\ 0 \le 2f(x) \le \pi. \end{cases}$$

При $x \in \left[\frac{1}{5}; 5\right]$ величина $\frac{x}{5}$ принимает значения из отрезка $\left[\frac{1}{25}; 1\right]$, который является подмножеством отрезка $[-1; 1]$. Используя определение $\arccos a$, мы получим, что

$$f(x) = \frac{1}{2}\arccos\frac{x}{5}.$$

Теперь исходная задача сводится к решению обычного неравенства с обратной тригонометрической функцией:

$$\arccos\frac{x}{5}\le\frac{\pi}{4}$$

на множестве $\frac{1}{5}\le x\le 5$. Это неравенство без труда решается графически, что дает окончательный ответ задачи: $\frac{5\sqrt{2}}{2}\le x\le 5$.

Разобранная задача интересна потому, что в ней требовалось решить «обычную» задачу (неравенство), в которой фигурирует функция, про которую известно лишь то, что она является решением некоторого функционального уравнения. В относительно простых случаях с помощью методов, аналогичных использованному выше, можно решить это функциональное уравнение и определить функцию в явном виде. После этого основная задача сводится к обычной задаче на решение уравнения (неравенства системы).

Отметим, что для решения задачи можно было бы и не находить функцию $f(x)$ в явном виде. Поскольку $2f(x)$ лежит на отрезке $[0;\pi]$, где косинус монотонно убывает, неравенство $f(x)\le\frac{\pi}{8}$ можно заменить на неравенство $\cos(2f(x))\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. Используя доказанное соотношение $\cos(2f(x))=\frac{x}{5}$, мы сразу получим: $x\ge\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Перед выписыванием ответа, конечно, нужно учесть условие $\frac{1}{5} \le x \le 5$.

Ответ: $\frac{1}{5} \le x \le 5$.

3.6. Задачи с параметром

Задача 3.57 (соц., 2008, № 7) *Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение*

$$\arcsin ax = 3\arccos x + \frac{\pi}{6} \qquad (3.30)$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение задачи 3.57. По определению, $\arcsin t$ — это такое число α, что

$$\begin{cases} \sin\alpha = t, \\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Поэтому уравнение (3.30) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin\left(3\arccos x + \frac{\pi}{6}\right) = ax, \\ -\frac{\pi}{2} \le 3\arccos x + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad (3.31)$$

Неравенство этой системы можно записать в виде:

$$-\frac{2\pi}{9} \le \arccos x \le \frac{\pi}{9}.$$

Используя график функции $y = \arccos x$ (рис. 3.15), мы получим, что множество его решений — отрезок $\cos\frac{\pi}{9} \le x \le 1$. Это, в частности, влечет, что $x \ne 0$.

Поэтому систему (3.31) можно переписать как

$$\begin{cases} a = \frac{1}{x} \cdot \sin\left(3\arccos x + \frac{\pi}{6}\right), \\ \cos\frac{\pi}{9} \le x \le 1. \end{cases} \quad (3.32)$$

Сама задача не изменится (только слово «уравнение» заменится на «система»): мы должны найти наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых система (3.32) имеет хотя бы одно решение.

Однако, поскольку уравнение системы (3.32) имеет вид $a = f(x)$, непосредственно по определению области значений функции мы можем сформулировать нашу задачу следующим образом:

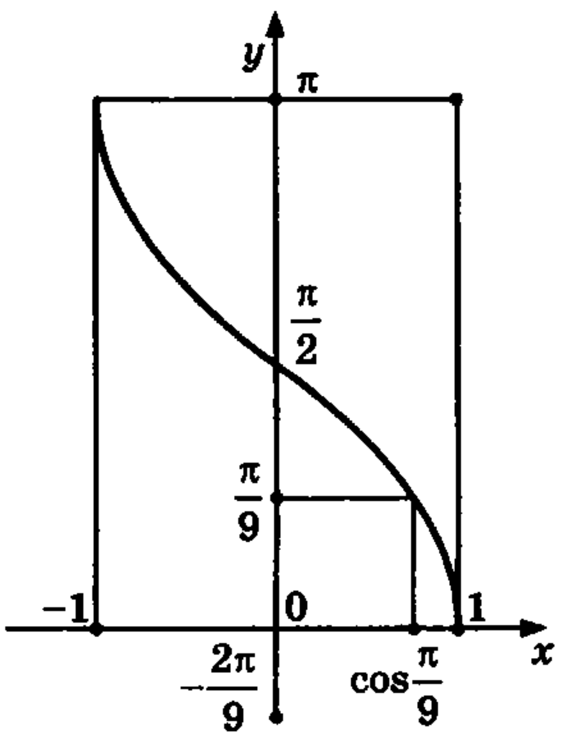


Рис. 3.15

найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\sin\left(3\arccos x+\frac{\pi}{6}\right) \qquad (3.33)$$

на отрезке $\cos\frac{\pi}{9}\le x\le 1$.

При изменении переменной x на отрезке $\left[\cos\frac{\pi}{9};1\right]$ функция $y=\frac{1}{x}$ положительна и монотонно убывает от $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}$ до 1.

При изменении переменной x на отрезке $\left[\cos\frac{\pi}{9};1\right]$ функция $y=\arccos x$ монотонно убывает от $\frac{\pi}{9}$ до 0. Соответственно, переменная $z=3\arccos x+\frac{\pi}{6}$ монотонно убывает от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{6}$, а тогда функция $y=\sin z\equiv$ $\equiv\sin\left(3\arccos x+\frac{\pi}{6}\right)$ монотонно убывает от 1 до $\frac{1}{2}$.

Произведение двух убывающих *неотрицательных* функций также будет убывающей функцией. Поэтому при изменении переменной x на отрезке $\left[\cos\frac{\pi}{9};1\right]$ функция (3.33) монотонно убывает от $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}$ до $\frac{1}{2}$.

Ответ: $a_{\min}=\frac{1}{2}$; $a_{\max}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}$.

Задача 3.58 (мех-мат., 2003, июль, № 5) *Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$\sin\arccos(5x) = a + \arcsin\sin(7x-3)$$

имеет единственное решение.

Решение задачи 3.58. Левая часть исходного уравнения определена на отрезке $-\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{5}$.

При изменении x на этом множестве выражение $t = 7x-3$ меняется на отрезке $\left[-\frac{22}{5}; -\frac{8}{5}\right]$. Поскольку $-\frac{22}{5} = -4{,}4 > -\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{8}{5} = -1{,}6 < -\frac{\pi}{2}$, можно гарантировать, что $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$. На этом множестве $\arcsin(\sin t) = -t - \pi$ (см. рис. 2.12 и равенство (2.103) при $n = -1$). Соответственно, $\arcsin\sin(7x-3) = -7x+3-\pi$.

Таким образом, исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\sin\arccos(5x) = a - 7x + 3 - \pi.$$

Введем новую неизвестную α с помощью соотношения:

$$\alpha = \arccos(5x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}\cos\alpha, \\ 0 \le \alpha \le \pi. \end{cases}$$

Поскольку между $\alpha \in [0; \pi]$ и $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right]$ существует взаимно-однозначное соответствие, наша задача примет вид:

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\alpha = a - \frac{7\cos\alpha}{5} + 3 - \pi \qquad (3.34)$$

имеет единственное решение на отрезке $0 \le \alpha \le \pi$.

Уравнение (3.34) преобразуем методом введения дополнительного аргумента:

$$\sin\alpha = a - \frac{7\cos\alpha}{5} + 3 - \pi,$$

$$\Updownarrow$$

$$5\sin\alpha + 7\cos\alpha = 5(a + 3 - \pi),$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{74}\sin(\alpha + \varphi) = 5(a + 3 - \pi),$$

где $\varphi = \arccos\frac{5}{\sqrt{74}} = \arcsin\frac{7}{\sqrt{74}}$.

Поскольку между $\alpha \in [0; \pi]$ и $\beta \equiv \alpha + \varphi \in [\varphi; \pi + \varphi]$ существует взаимно-однозначное соответствие, исходная задача примет вид:

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\beta = A,$$

где $A = \frac{5(a + 3 - \pi)}{\sqrt{74}}$, *имеет единственное решение на отрезке* $\varphi \le \beta \le \pi + \varphi$.

Из графика функции $y = \sin\beta$ ясно, что это выполнено для значений A, удовлетворяющих условиям $-\sin\varphi \le A < \sin\varphi$ или $A = 1$ (и только для них). Возвращаясь к переменной a, мы немедленно получаем ответ.

Ответ: $\pi-3-\frac{7}{5}\le a<\pi-3+\frac{7}{5}$, $a=\pi-3+\frac{\sqrt{74}}{5}$.

Задача 3.59 (мех-мат., 2004, март, № 5) *Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

$$\operatorname{arctg}\left((3a-1)\sin^2 x-(3a^3-a^2+3a-1)\sin x+\operatorname{tg}(ax-a\pi)\right)-$$
$$-ax+a\pi=0$$

имеет ровно три решения.

Решение задачи 3.59. Перепишем исходное уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}\left((3a-1)\sin^2 x-(3a^3-a^2+3a-1)\sin x+\operatorname{tg}(ax-a\pi)\right)=$$
$$=ax-a\pi.$$

Поскольку равенство $\operatorname{arctg} A = B$ равносильно тому, что $\operatorname{tg} B = A$ и $|B|<\frac{\pi}{2}$ (это просто определение числа $\operatorname{arctg} A$), наше уравнение равносильно тригонометрическому уравнению

$$(3a-1)\sin^2 x-(3a^3-a^2+3a-1)\sin x=0 \qquad (3.35)$$

с условием отбора корней:

$$|ax-a\pi|<\frac{\pi}{2}. \qquad (3.36)$$

Если $a\ne\frac{1}{3}$, то последнее уравнение является квадратным относительно $z = \sin x$ и поэтому оно распадается на два уравнения: $\sin x = 0$ и $\sin x = a^2 + 1$ (мы используем разложение многочлена $3a^3 - a^2 + 3a - 1$ на множители $(3a - 1)$ и $(a^2 + 1)$).

Поэтому при $a = 0$ уравнение (3.35) имеет бесконечно много корней вида: $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Все эти корни удовлетворяют условию (3.36) (т.к. при $a = 0$ оно превращается в истинное числовое неравенство). Таким образом, значение $a = 0$ не должно включаться в ответ.

При $a \neq 0$ уравнение (3.35) имеет бесконечно много корней вида: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для них условие (3.36) превращается в неравенство

$$|n-1| < \frac{1}{2|a|}.$$

Параметр a включается в ответ тогда и только тогда, когда это неравенство имеет ровно три целочисленных решения. Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух чисел, мы видим, что это равносильно неравенству

$$1 < \frac{1}{2|a|} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq |a| < \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $a \neq \frac{1}{3}$, мы получим, что из $a \neq \frac{1}{3}$; 0 в ответ включаются только следующие значения a: $-\frac{1}{2} < a \leq -\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$.

И наконец, в особом случае $a = \frac{1}{3}$ уравнение (3.35) превращается в уравнение 0 = 0, решениями которого являются все действительные числа. При $a = \frac{1}{3}$ условие (3.36) принимает вид $|x - \pi| < \frac{3\pi}{2}$, так что множество решений исходного уравнения — это интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$. Поскольку это множество бесконечно, значение $a = \frac{1}{3}$ не должно включаться в ответ.

Ответ: $-\frac{1}{2} < a \le -\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \le a < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$.

Задача 3.60 (мех.-мат. ф-т, 2004, март, (заочный тест), № 3) *Найдите все a, при каждом из которых уравнение*

$$\arccos\left(\sin(x - a)\right) - a = \arcsin\left(\cos(x + a)\right) + a$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение задачи 3.60. Прежде всего с помощью тождества

$$\arcsin x + \arccos = \frac{\pi}{2}$$

преобразуем уравнение так, чтобы в него входили стандартные функции $y = \arcsin(\sin x)$ и $y = \arccos(\cos x)$:

$$\arcsin\left(\sin(x - a)\right) + a = \arccos\left(\cos(x + a)\right) - a.$$

Теперь введем новую неизвестную $t = x - a$. Поскольку между t и x существует взаимно-однозначное соответствие, исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

Найти все a, при каждом из которых уравнение

$$\arcsin(\sin t) = \arccos\left(\cos(t + 2a)\right) - 2a$$

имеет хотя бы одно решение.

Дальнейшее упрощение можно получить, если отметить, что

$$\arcsin(\sin t) = \arccos\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Это тождество очевидно следует из графиков функций $y = \arcsin(\sin t)$, $y = \arccos(\cos t)$ и, кроме того, легко может быть доказано формальными преобразованиями:

$$\arccos\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2} = \arccos(-\cos t) - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \pi - \arccos(\cos t) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos t) =$$

$$= \arcsin(\sin t).$$

Теперь наше уравнение примет вид:

$$\arccos\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2} = \arccos\left(\cos(t + 2a)\right) - 2a$$

$$\Updownarrow$$

$$\arccos(\cos z) = \arccos\left(\cos(z + A)\right) - A,$$

где $z = t + \dfrac{\pi}{2}$, $A = 2a - \dfrac{\pi}{2}$.

Поскольку соответствие между t и z взаимно-однозначное, вопрос задачи остается прежним: когда уравнение

$$\arccos(\cos z) = \arccos\left(\cos(z + A)\right) - A,$$

имеет хотя бы одно решение?

Будем решать это уравнение графически.

Для $A = 0$ графики левой и правой частей совпадают, так что множество решений этого уравнения — вся числовая прямая.

Будем теперь увеличивать A. Тогда график функции $y = \arccos\left(\cos(z + A)\right) - A$ будет получаться из графика функции $y = \arccos(\cos z)$ параллельным переносом на A единиц влево и A единиц вниз. Этот график будет пересекаться с графиком функции $y = \arccos(\cos z)$ до тех пор, пока $A \le \pi$ (для $A > \pi$ он окажется ниже графика функции $y = \arccos(\cos z)$).

Аналогично, при уменьшении A от 0 в отрицательную сторону график функции $y = \arccos(\cos(z + A)) - A$ будет пересекаться с графиком функции $y = \arccos(\cos z)$ до тех пор, пока $A \ge -\pi$ (для $A < -\pi$ он окажется выше графика функции $y = \arccos(\cos z)$).

Итак, условию задачи удовлетворяют значения A такие, что $-\pi \le A \le \pi$. Им соответствуют следующие значения основного параметра a: $-\frac{\pi}{4} \le a \le \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} \le a \le \frac{3\pi}{4}$.

Задача 3.61 (эконом.(менеджмент), 2003, апрель, № 5) *Найдите все значения параметра b, при которых уравнение*

$$b^2\sin\left(\frac{\pi+2}{2}-x\right)+\sin^2\left(\frac{2x}{b+1}-\frac{2}{b+1}\right)-$$

$$-b\sqrt{4x^2+8-8x}=3+\arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

Решение задачи 3.61. В уравнении явно усматривается повторяющийся блок $x-1$:

$$b^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-(x-1)\right)+\sin^2\left(\frac{2(x-1)}{b+1}\right)-$$

$$-b\sqrt{4(x-1)^2+4}=3+\arcsin|x-1|.$$

Поэтому введем новую неизвестную $t=x-1$. Для нее исходное уравнение примет вид:

$$b^2\cos t+\sin^2\left(\frac{2t}{b+1}\right)-2b\sqrt{t^2+1}=3+\arcsin|t|. \quad (3.37)$$

Поскольку между t и x существует взаимно-однозначное соответствие, вопрос задачи останется неизменным: при каких значениях параметра b уравнение (3.37) имеет единственный корень?

Неизвестная t входит в это уравнение только через четные функции. Поэтому оно не изменится, если t заменить на $(-t)$. Это свойство *инвариантности* уравнения (3.37) относительно преобразования $t\to(-t)$ влечет, что если какое-то число t_0 является корнем уравнения (3.37), то и число $(-t_0)$ также будет корнем. Поэтому уравнение (3.37) имеет единственный корень только в случае, когда среди корней присутствует число $t_0=0$ (но при этом не исключено наличие и других корней).

Найдем, при каких значениях параметра b число 0 является корнем уравнения (3.37). Для этого подставим число 0 на место неизвестной. После несложных упрощений мы получим систему

$$\begin{cases} b^2 - 2b - 3 = 0, \\ b + 1 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3; -1, \\ b \neq -1, \end{cases} \Leftrightarrow b = 3.$$

Обратим внимание читателя на условие $b+1\neq 0$ — оно обеспечивает существование члена $\sin^2\left(\dfrac{2t}{b+1}\right)$ и тем самым гарантирует равносильность проделанных упрощений.

Итак, уравнение (3.37) может иметь единственный корень только для $b = 3$, при этом этим единственным корнем может быть только число 0. Еще раз подчеркнем, что это не исключает наличие и других корней; важно лишь то, что для значений параметра b, отличных от 3, уравнение (3.37) не может иметь единственный корень.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет наше уравнение для «подозрительного» значения параметра.

Если $b = 3$, то уравнение (3.37) примет вид:

$$9\cos t + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - 6\sqrt{t^2+1} = 3 + \arcsin|t|.$$

Понизим степень члена $\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$:

$$17\cos t - 12\sqrt{t^2+1} = 5 + 2\arcsin|t|.$$

На множестве $-1 \le t \le 1$ (где определено это уравнение) функция $f(t) = 17\cos t - 12\sqrt{t^2+1}$ (левая часть уравнения) сначала возрастает от $f(-1) = 17\cos 1 - 12\sqrt{2}$ до $f(0) = 5$, а затем убывает до значения $f(1) = f(-1)$ (функция $f(t)$ — четная). Функция $g(t) = 5 + 2\arcsin|t|$ (правая часть уравнения) наоборот, сначала убывает от $g(-1) = 5 + \pi$ до $g(0) = 5$, а затем возрастает до значения $g(1) = g(-1)$ (функция $g(t)$ — четная). Поэтому уравнение $f(t) = g(t)$ имеет единственный корень $t = 0$.

Следовательно, проверяемое значение параметра b нужно включить в ответ задачи.

Ответ: 3.

Задача 3.62 (географ., 2006, № 6) *При каких значениях параметра c число решений уравнения*

$$2x\arcsin(\sin x) = c3^{\log_3 x} + 3$$

конечно?

Решение задачи 3.62. Выражение $3^{\log_3 x}$ определено при $x > 0$ и на этом множестве совпадает с x. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \arcsin(\sin x) = \dfrac{c}{2} + \dfrac{3}{2x}, \\ x > 0. \end{cases}$$

Теперь нашу задачу можно переформулировать следующим образом:

при каких значениях параметра c графики функций $f(x) = \arcsin(\sin x)$ *и* $g(x) = \dfrac{c}{2} + \dfrac{3}{2x}$ *имеют в полуплоскости* $x > 0$ *конечное число точек пересечения?*

График функции $f(x)$ мы построили при решении задачи 3.37. Это пилообразная линия, изображенная на рис. 3.8.

График функции $g(x)$ при $x > 0$ — это правая ветвь гиперболы с горизонтальной асимптотой $y=\frac{c}{2}$ и вертикальной асимптотой $x = 0$.

Если оба графика изобразить на одной координатной плоскости, то из рисунка будет ясно, что они пересекаются в конечном числе точек тогда и только тогда, когда $\frac{c}{2}\geq\frac{\pi}{2}$ (в этом случае графики вообще не пересекаются, так что число решений равно 0) или $\frac{c}{2}<-\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $c<-\pi$, $c\geq\pi$.

Задача 3.63 (геолог. (геофизика), 1974, № 3) *Определите, при каких целых значениях k система*

$$\begin{cases}(\operatorname{arctg} x)^2+(\arccos y)^2=\pi^2 k,\\ \operatorname{arctg} x+\arccos y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

имеет решения и найдите все эти решения.

Решение задачи 3.63. Введем новые неизвестные $u = \operatorname{arctg}\ x$, $v = \arccos\ y$. Для них исходная система примет вид:

$$\begin{cases}u^2+v^2=\pi^2 k,\\ u+v=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \qquad (3.38)$$

Исходная система относительно неизвестных x и y имеет решение тогда и только тогда, когда эта система относительно неизвестных u и v имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le v \le \pi. \end{cases} \qquad (3.39)$$

В этом случае $x = tg\, u$, $y = \cos v$.

Левая часть первого уравнения системы (3.38) неотрицательна. Поэтому при $k < 0$ наша задача не имеет решений. Если $k = 0$, то первое уравнение системы (3.38) имеет единственное решение $(u;\ v) = (0;\ 0)$, которое не удовлетворяет второму уравнению, так что при $k = 0$ наша задача также не имеет решений.

Если $k = 1,\ 2,\ \ldots$, то множество решений первого уравнения системы (3.38) является окружностью радиуса $R = \pi\sqrt{k}$ с центром в начале координат (при обычной интерпретации пары чисел $(u;\ v)$ как точки на координатной плоскости). Второе уравнение той же системы задает прямую линию, проходящую через точки $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

При любом $k \ge 1$ эти две линии пересекаются в двух точках, но при $k \ge 2$ обе точки пересечения лежат вне квадрата со стороной π, задаваемого системой (3.39). В случае $k = 1$ в этот квадрат попадает лишь левая точка пересечения (у нее отрицательная абсцисса и положительная ордината). Найти координаты этой точки можно прямым решением системы (3.38) при $k = 1$.

После исключения неизвестной v мы получим:

$$u^2+\left(\frac{\pi}{2}-u\right)^2=\pi^2 \Leftrightarrow 2u^2-\pi u-\frac{3\pi^2}{4}=0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня:

$$u_1=\pi\frac{1+\sqrt{7}}{4},\quad u_2=\pi\frac{1-\sqrt{7}}{4},$$

так что система (3.38) имеет два решения $\left(\pi\frac{1+\sqrt{7}}{4};\pi\frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$ и $\left(\pi\frac{1-\sqrt{7}}{4};\pi\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$. Первая пара — это правая точка пересечения окружности $u^2+v^2=\pi^2$ и прямой $u+v=\frac{\pi}{2}$, а вторая — интересующая нас левая.

Возвращаясь к основным неизвестным x и y, мы имеем:

$$\begin{cases} x=\operatorname{tg}u=\operatorname{tg}\dfrac{\left(1-\sqrt{7}\right)\pi}{4}, \\ y=\cos v=\cos\dfrac{\left(1+\sqrt{7}\right)\pi}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $k=1$, $x=\operatorname{tg}\frac{\left(1-\sqrt{7}\right)\pi}{4}$, $y=\cos\frac{\left(1+\sqrt{7}\right)\pi}{4}$.

ГЛАВА 4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Тождества и преобразования

1. (Почвовед., 1999, май, № 1) Определите, что больше:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_{81}\left(\frac{1}{27}\right) \text{ или } \sin\frac{43\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}^3\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}?$$

Ответ: второе число больше.

2. (ВМК, 1999, июль, № 1) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$. Сравните

$$\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha-1}\right) \text{ и } \frac{19\pi}{24}.$$

Ответ: $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha-1}\right)<\frac{19\pi}{24}$.

3. (географ., 2001, май, № 4) Сравните два числа $\frac{3\pi}{10}$ и $\arcsin\frac{4}{5}$.

Ответ: $\arcsin\frac{4}{5}<\frac{3\pi}{10}$.

4. (геолог., 2000, устный) Вычислите

$$\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right).$$

Ответ: -7.

5. (геолог., 2007, устный) Найдите значение $\arccos(\cos 10)$.

Ответ: $10-3\pi$.

6. (геолог., устный, 1998) Вычислите

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

7. (ВМК, устный, 2001) Вычислите значение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arcctg}3}{2}\right).$$

Ответ: $\sqrt{10}-3$.

8. (геолог., устный, 2002) Является ли число $\operatorname{ctg}(\arcsin 0{,}25)$ рациональным?

Ответ: нет (это число равно $\sqrt{15}$).

9. (ВМК, устный, 2000+2003) Вычислите

$$\sin(2\operatorname{arcctg}2)+\cos(2\operatorname{arcctg}3).$$

Ответ: $\frac{8}{5}$.

10. (ВМК, устный, 2001) Вычислите

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

11. (ВМК, устный, 1998) Вычислите

$$\operatorname{arctg}\left(3+2\sqrt{2}\right)-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

4.2. Графики

12. (ВМК, устный, 1995) Вычислите кратчайшее расстояние от точки с координатами (2; 3) до графика функции

$$y = \sin(\arccos x).$$

Ответ: $\sqrt{13}-1$.

13. (ВМК, 2007, устный) Изобразите на координатной плоскости $(x,\ y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$x = y \cdot \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \cdot \sqrt{x^2+y^2}.$$

14. (ВМК, 2007, устный) Изобразите на координатной плоскости $(x,\ y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$y = x \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \cdot \sqrt{x^2+y^2}.$$

15. (эконом., 2005, июль, № 7) Фигура F задается на координатной плоскости неравенством

$$\frac{2\arcsin\left(\dfrac{4y-4x+9}{13}\right)+\arccos\left(\dfrac{4y+4x-5}{9}\right)-3\pi}{|y+1|\cdot\left(|4x-5|+\left|4y-\sqrt{72\sqrt{2}-97}\right|\right)} \le 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F?

Ответ: $0 < S < \pi$.

4.3. Уравнения

16. (МК-МГУ, 2006, очный тур., эконом., № 4) Решите уравнение

$$\arccos\left(\frac{3}{2}+\cos\left(\pi\cdot\frac{x^2-8x+16}{x^2-5x+7}\right)\right)-\frac{\pi}{3}=0.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{5}{2}$; $x_3 = 3$.

17. (эконом., 1999, июль, № 5) Решите уравнение

$$x+\frac{1}{6}\arccos(\cos 15x+2\cos 4x\sin 2x)=\frac{\pi}{12}.$$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{26}$; $x_2=\frac{\pi}{34}$.

18. (почвовед., 2005, июль, № 2) Решите уравнение

$$\sin\left(\sqrt{3}\arcsin x\right)=1.$$

Ответ: $x=\sin\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

19. (ВМК, 2007, устный) Числа 5, x, y образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, а числа $\pi-\arcsin(\sin x)$, 3 и $\cos(\arccos y)+2$ — геометрическую прогрессию. Найдите x, y.

Ответ: $x = 3$, $y = 1$.

20. (ВМК, устный, 2004) Решите уравнение

$$\arcsin\left(x^2+x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(x^2+x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

21. (Севастополь, 2003, май, № 7) Известно, что

$$\frac{4\operatorname{arctg}^2 x}{x} + 7\pi \operatorname{arctg} x = 2\pi^2 x.$$

Найдите

$$\frac{x^2}{x \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}^2 x}.$$

Ответ: $\frac{16}{4\pi + \pi^2}$.

22. (географ., 2001, июль, № 5) Решите уравнение

$$4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

Ответ: 3.

4.4. Системы уравнений

23. (ИСАА, 2002, июль, № 6) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos 2y + \arcsin 3x = \dfrac{\pi}{4}, \\ \arcsin 2y \cdot \arccos 3x = \dfrac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

Для каждого решения $(x;\ y)$ определите, какое из чисел больше: $2y - 3x$ или $\sqrt[4]{2} - 0{,}5$.

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше.

24. (ВМК (отд. бакалавров), 2005, июль, № 4) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \arccos\left(\dfrac{x+y}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{5xy}{24}\right), \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Ответ:

$$\left\{\left(\frac{-13-\sqrt{481}}{10}, \frac{-13+\sqrt{481}}{10}\right), \left(\frac{-13+\sqrt{481}}{10}, \frac{-13-\sqrt{481}}{10}\right)\right\}.$$

4.5. Неравенства

25. (ВМК, устный, 2008, июль) Решите неравенство

$$\arcsin^4(2x) \ge \arccos^4(2x).$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \le x \le \dfrac{1}{2}$.

26. (договорные программы, 2007, июль, № 6) Решите неравенство

$$\left(\arcsin x - \frac{\pi}{6}\right) \lg\left(x^2 + \frac{9}{25}\right) > 0.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{4}{5}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{4}{5}; 1\right]$.

4.6. Задачи с параметром

27. (эконом., 2008, № 6) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}\left(x+4+\sqrt{x^2+8x+17}\right)=$$
$$=a^2-a\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2+8x-64}{32}\right)-2$$

имеет единственное решение, и определите это решение.

Ответ: $a = 1$, $x = -4$.

28. (ВМК, 1998, июль, № 5) Найдите все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2)\le 5, \\ \sqrt{a^2+\frac{6}{\pi}\cdot\arccos\sqrt{1-x^2}-16-\frac{2}{\pi^2}\arcsin x\cdot(\pi+2\arcsin x)}\ge \\ \ge y^2+2ay+7. \end{cases}$$

Ответ: $a\le-\sqrt{13}$, $a\ge\frac{11}{3}$.

29. (ФГП, 2006, № 7) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(25^x-9+a-y)=0, \\ y\cdot 5^{-x}+\sqrt{a-1}=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$, удовлетворяющее условию $x_0\le 0$.

Ответ: $\frac{17-\sqrt{29}}{2}\le a<9$.

30. (мех-мат., 1998, май, № 4) Найдите все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y=-\frac{2}{3}-\arcsin x \text{ и } y=-\frac{2}{3}-2\operatorname{arctg} kx$$

имеет положительную ординату.

Ответ: $\dfrac{1}{1+\cos\frac{2}{3}}<k\le 1.$

31. (психолог., 1998, июль, № 6) Найдите все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right)-b\cdot 2^{\sin(\pi bx)}-$$
$$-\left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right)+b\cdot 2^{\sin(\pi bx)}\right|=2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Ответ: $a=-2$, $b=4, 5, \ldots$; $a=-1$, $b=3, 4, \ldots$

32. (соц., 1999, июль, № 6) При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\ge$$
$$\ge\left|\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5; 6]$?

Ответ: $a=0$, $a\le -1$, $a>2$.

33. (эконом., 1995, № 5) Найдите все $x\in[-3;1]$, для которых неравенство

$$x\left(\pi(x+1)-4\operatorname{arctg}(3m^2+12m+11)\right)>0$$

выполняется при любых целых m.

Ответ: $-3\le x<-2$, $x=1$.

34. **(эконом., 2006, № 6)** Найдите все a, при которых неравенство

$$4a^2\cdot\sqrt{14-\frac{30}{\pi}\arccos\left(2x-\sqrt{3}\right)}+\frac{60a}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{3}-2x\right)-$$

$$-12a^2+24a\le 12$$

выполняется для любых $x\in\left[\frac{1+2\sqrt{3}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.

Ответ: $a\le\frac{3}{2}$, $2\le a\le 3$.

Учебное издание

Фалин Геннадий Иванович
Фалин Анатолий Иванович

Обратные тригонометрические функции

10–11 классы

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. H 15295 от 13.04.2011 г.

Главный редактор *Л.Д. Лаппо*
Редактор *И.М. Бокова*
Технический редактор *Т.В. Фатюхина*
Корректор *Л.И Иванова*
Дизайн обложки *М Н. Ершова*
Компьютерная верстка *Д.А Ярош*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр 1
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).